分 类 号：O211　　　　　　　　单位代码：10183
研究生学号：[illegible]　　　　　　密　　级：公开

吉林大学
博士学位论文

孙凯

2015年5月

随机微分方程的概自守解

Almost Automorphic Solutions for Stochastic Differential Equations

作者姓名：孙　凯

专业名称：概率论与数理统计

研究方向：随机微分方程

指导教师：柳振鑫　教授

学位类别：理学博士

培养单位：数学研究所

论文答辩日期：　2015 年 5 月 29 日

授予学位日期：　2015 年　　月　　日

答辩委员会主席：洪佳林

论 文 评 阅 人：李勇　黄文　王毅　黄建华　储继峰

吉林大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其它个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：孙凯

日期： 2015 年5月1日

提　要

本学位论文主要致力于随机微分方程概自守解的研究. 首先, 我们引入了概自守随机过程和Poisson 概自守的概念. 在方程系数满足一定的条件时, 我们证明了由无限维Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程的依分布概自守解的存在性. 此外, 我们还讨论了这些依分布概自守解的全局渐近稳定性. 其次, 我们研究了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的半线性随机微分方程, 证明了其存在唯一有界的依分布概自守解. 最后, 我们研究了由Gauss 噪音驱动的缺少Favard 分离条件的线性随机微分方程的依分布概周期解和依分布概自守解的存在性.

中 文 摘 要

随机微分方程的概自守解

作者姓名　孙凯
专业名称　概率论与数理统计
指导教师　柳振鑫 教授

本文主要研究了随机微分方程的概自守解的存在性, 唯一性和稳定性. 在现实世界中, 很多事物除了受到连续变化的噪音干扰, 还可能受到不连续的突发性波动干扰, 比如地震、海啸、台风、金融危机、流行病爆发等. 带有Gauss 噪音驱动的随机微分方程已经被大量学者广泛应用于各种受到连续扰动的模型中. 为了对在现实世界中构建的模型更为精确的描述, 人们开始研究以Poisson 过程为驱动的随机微分方程; 进一步, 研究更为复杂的以半鞅为驱动的随机微分方程. Lévy 过程是一类重要的半鞅, 布朗运动和Poisson 过程都是Lévy 过程的特例. 所以, 以Lévy 过程为驱动的随机微分方程为我们提供了一个更为强大的模型和有力的工具. 当微分方程或者系统被跳跃噪音或者更一般的Lévy 噪音扰动时, 很小的跳跃应该只会稍微影响概自守性, 但是大的跳跃的出现是否会破坏概自守性是我们感兴趣的问题. 第二章, 我们证明了Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程的依分布概自守温和解的存在唯一性和在均方意义下解的全局渐近稳定性. 第三章, 我们证明了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程的依分布概自守温和解的存在唯一性. 从第二章和第三章中得到的研究结果, 我们可以看出在适当的条件下大的跳跃的出现并不会影响概自守性. 第四章, 我们研究的是Gauss 噪音驱动的线性随机微分方程解的存在性问题, 证明了若带有概自守(概周期)系数的随机微分方程存在一个有界解且其相关齐次方程的所有有界解都同宿趋于零, 则方程至少有一个依分布的概自守(概周期)解.

下面我们对本文的主要结果作以介绍.

在本文中, 设$(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ 和$(U, |\cdot|_U)$ 是两个实可分的Hilbert 空间, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间. $\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 表示所有使得

$$\mathbf{E}\|Y\|^2 = \int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P} < \infty$$

的$\mathbb{H}$-值随机变量Y 构成的空间, 其范数定义为$\|Y\|_2 := \left(\int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P}\right)^{1/2}$. 设$L(U, \mathbb{H})$ 表示所有从U 到$\mathbb{H}$ 的有界线性算子构成的空间其上范数为$\|\cdot\|_{L(U,\mathbb{H})}$.

1. Lévy 噪音驱动的随机微分方程

定义 1 随机过程$Y:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 称为$\mathcal{L}^2$-连续, 若对任意的$s\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to s}\mathbf{E}\|Y(t)-Y(s)\|^2=0.$$

若$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2<\infty$, 则称其为$\mathcal{L}^2$-有界.

定义 2 *(1)* $\mathcal{L}^2$-连续的随机过程$x:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 称为均方概自守, 若对每一个实数列$\{s'_n\}$, 都存在一个子列$\{s_n\}$ 和一个随机过程$y:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|x(t+s_n)-y(t)\|^2=0\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|y(t-s_n)-x(t)\|^2=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 上都成立. 令$AA(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 表示所有均方概自守随机过程$x:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$构成的集合.
(2) 函数$g:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $(t,Y)\mapsto g(t,Y)$ 称为均方概自守, 若g 按下述意义连续

$$\mathbf{E}\|g(t,Y)-g(t',Y')\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\to 0,\qquad 当(t',Y')\to(t,Y)时,$$

并且对任意实数列$\{s'_n\}$ 都存在子列$\{s_n\}$ 和函数$\widetilde{g}:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|g(t+s_n,Y)-\widetilde{g}(t,Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0\quad 且\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|\widetilde{g}(t-s_n,Y)-g(t,Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$上都成立.
(3) 函数$F:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $(t,Y,x)\mapsto F(t,Y,x)$ 称为Poisson 均方概自守, 若F 按下述意义连续

$$\int_U\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t',Y',x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\to 0,\qquad 当(t',Y')\to(t,Y)时,$$

并且对任意实数列$\{s'_n\}$ 都存在子列$\{s_n\}$ 和满足$\int_U\mathbf{E}\|\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty$ 的函数$\widetilde{F}:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_U\mathbf{E}\|F(t+s_n,Y,x)-\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_U\mathbf{E}\|\widetilde{F}(t-s_n,Y,x)-F(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上都成立.

我们考虑如下Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) =& AY(t)\mathrm{d}t + f(t,Y(t))\mathrm{d}t + g(t,Y(t))\mathrm{d}W(t) \\ &+ \int_{|x|_U<1} F(t,,Y(t-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \\ &+ \int_{|x|_U\geq 1} G(t,Y(t-),x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \qquad t\in\mathbb{R},\end{aligned} \tag{1}$$

这里A 是在$\mathbb{H}$ 上生成耗散$\mathcal{C}^0$-半群$(T(t)_{t\geq 0})$ 的无穷小生成元, 其满足

$$\|T(t)\| \leq K\mathrm{e}^{-\omega t}, \qquad \forall t\geq 0, \tag{2}$$

其中$K>0$, $\omega>0$; $f:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $g:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $F:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $G:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$; W 是Q-Wiener 过程, N 是Poisson 随机测度, $\widetilde{N}$ 是N 的补偿Poisson 随机测度. W, N 和$\widetilde{N}$ 可通过双边Lévy 过程L 经Lévy-Itô 分解得到.

定义 3 $\mathcal{F}_t$-循序可测随机过程$\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为方程(1) 的温和解, 若其满足相应的随机积分方程

$$\begin{aligned}Y(t) =& T(t-r)Y(r) + \int_r^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_r^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s) \\ &+ \int_r^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ &+ \int_r^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\end{aligned}$$

对任意的$t\geq r$ 和$r\in\mathbb{R}$ 成立.

定理 1 考虑方程(1). 设A 生成一个耗散$\mathcal{C}^0$-半群使得(2) 成立, f, g 是均方概自守的, F 和G 是*Poisson* 均方概自守的. 而且f, g, F 和G 是关于Y 满足*Lipschitz* 条件且*Lipschitz* 常数与t 无关, 即对任意的$Y,Z\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 和$t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2 \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\mathbf{E}\|(g(t,Y)-g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,Y,x)-G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

其中$L>0$ 为与t 无关的常数. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}<\frac{1}{4K^2L}, \tag{3}$$

则(1) 存在一个唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解. 进一步, 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{8K^2L}, \tag{4}$$

则这个唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是依分布概自守的.

定义 4 方程*(1)* 的解$Y(t)$称为在均方意义下稳定, 若对任意的$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$ 使得当$\mathbf{E}\|d-Y(0)\|^2<\delta$时

$$\mathbf{E}\|Y_d(t)-Y(t)\|^2<\epsilon,\quad t\geq 0,$$

其中$Y_d(t)$ 表示在初值条件$Y_d(0)=d$ 下方程*(1)* 的解. 解$Y(t)$ 称为在均方意义下渐近稳定, 若它在均方意义下稳定并且

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\|Y_d(t)-Y(t)\|^2=0. \tag{5}$$

若(5) 对任意的$d\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 成立, 则$Y(t)$ 称为在均方意义下全局渐近稳定.

定理 2 假设定理*1* 的条件成立. 若将(3) 改为

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{5K^2L},$$

则方程(1) 的唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是在均方意义下全局渐近稳定的. 特别地, 当(4) 成立时, 此唯一$\mathcal{L}^2$-有界解既是依分布概自守的亦是在均方意义下全局渐近稳定的.

2. Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程

定义 5 一个发展族$\{U(t,s):t\geq s,\ t,s\in\mathbb{R}\}$ 称为具有指数二分性, 若有关于t 一致有界且强连续的投影$P(t)$, $t\in\mathbb{R}$, 常数$K\geq 1$ 和$\omega>0$ 使得

1. $P(t)U(t,s)=U(t,s)P(s)$;
2. $U(t,s)$ 的限制$U_J(t,s):J(s)\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to J(t)\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 是可逆的*(*我们可设$U(s,t):=(U_J(t,s))^{-1}$*)*;
3. 对$t\geq s$ 有$\|U(t,s)P(s)\|\leq K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}$, 且对$t<s$ 有$\|U(t,s)J(s)\|\leq K\mathrm{e}^{\omega(t-s)}$,

其中$J(s)=I-P(s)$.

考虑如下Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程

$$\mathrm{d}Y(t) = A(t)Y(t)\mathrm{d}t+f(t,Y(t))\mathrm{d}t+g(t,Y(t))\mathrm{d}W(t) \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{|x|_U<1} F(t,Y(t-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\\
&+\int_{|x|_U\geq 1} G(t,Y(t-),x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \qquad t\in\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

其中$f:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $g:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $F:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $G:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 是连续函数; W 是Q-Wiener 过程, N 是Poisson 随机测度, $\widetilde{N}$ 是N 的补偿Poisson 随机测度. 我们注意到W, N 和$\widetilde{N}$ 都可由双边Lévy 过程经过Lévy-Itô 分解得到.

我们还进行了以下假设.

(H1) 假设由$A(t)$生成的发展族$\{U(t,s):t\geq s,\ t,s\in\mathbb{R}\}$ 具有指数二分性, 即存在投影$P(t)$, 常数$K\geq 1$ 和$\omega>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
\|U(t,s)P(s)\| &\leq Ke^{-\omega(t-s)}, \quad 对t\geq s,\\
\|U(t,s)J(s)\| &\leq Ke^{\omega(t-s)}, \quad 对t\leq s,
\end{aligned}
$$

其中$J(s)=I-P(s)$.

(H2) 假设$A(t)$ 满足'Acquistapace-Terreni' 条件, $U(t,s)$ 是指数二分的且$R(\lambda_0,A(\cdot))\in AA(\mathbb{R};L_b(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})))$. 则对任意实数列$\{s_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在常数$\delta>0$ 和子列$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意$\epsilon>0$, 存在$\mathbf{N}\in\mathbb{N}$ 有

$$
\|U(t+s_n,s+s_n)P(s+s_n)-U(t,s)P(s)\|\leq\epsilon e^{-\delta(t-s)}
$$

对任意$n>\mathbf{N}$ 和$t\geq s$ 成立; 而且, 对任意$n\geq\mathbf{N}$ 和$t\leq s$, 有

$$
\|U(t+s_n,s+s_n)J(s+s_n)-U(t,s)J(s)\|\leq\epsilon e^{\delta(t-s)}.
$$

(H3) 假设f, g 是均方概自守的, F, G是Poisson 均方概自守的. 而且f, g, F 和G 关于Y 满足Lipschitz 条件且Lipschitz 常数与t 无关, 也就是说, 对任意的$Y,Z\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 和$t\in\mathbb{R}$, 存在与t 无关的常数$L>0$ 使得

$$
\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,
$$

$$
\mathbf{E}\|(g(t,Y)-g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,
$$

$$
\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,
$$

$$
\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,Y,x)-G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2.
$$

定义 6 $\mathcal{F}_t$-循序可测随机过程$\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为方程(6) 的温和解, 若对任意的$t\geq r$ 和$r\in\mathbb{R}$, 其满足相应的随机积分方程

$$\begin{aligned}Y(t) &= U(t,r)Y(r)+\int_r^t U(t,r)f(s,Y(s))\mathrm{d}s+\int_r^t U(t,r)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\&\quad+\int_r^t\int_{|x|_U<1}U(t,r)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\&\quad+\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}U(t,r)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

定理 3 假设*(H1)* 和*(H3)* 成立. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}<\frac{1}{16K^2L},$$

则(6) 有唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解.

定理 4 假设*(H1), (H2)* 和*(H3)* 成立. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{72K^2L},$$

则方程(6) 的唯一$\mathcal{L}^2$-有界温和解是依分布概自守的.

3. Gauss 噪音驱动的线性随机微分方程

设$L_b(B)$ 表示Banach 空间B 上所有有界线性算子构成的空间. 令$C(\mathbb{R},L_b(\mathbb{R}^n))$ 表示所有连续算子值函数$A:\mathbb{R}\to L_b(\mathbb{R}^n)$ 在紧开拓扑意义下构成的空间. 考虑下列Gauss 噪音驱动的线性随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t)=A(t)X(t)\mathrm{d}t+f(t)\mathrm{d}t+g(t)X(t)\mathrm{d}W(t)+h(t)\mathrm{d}W(t) \tag{7}$$

和其相关的齐次方程

$$\mathrm{d}X(t)=A(t)X(t)\mathrm{d}t+g(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \tag{8}$$

其中$A\in C(\mathbb{R},L_b(\mathbb{R}^n))$, $f:\mathbb{R}\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $g:\mathbb{R}\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $h:\mathbb{R}\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. 除了方程(7) 和(8) 外, 我们还可以考虑方程(7) 和(8) 的壳方程, 也就是方程

$$\mathrm{d}Z(t)=B(t)Z(t)\mathrm{d}t+f'(t)\mathrm{d}t+g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t)+h'(t)\mathrm{d}W(t) \tag{9}$$

和其相关的齐次方程

$$\mathrm{d}Z(t)=B(t)Z(t)\mathrm{d}t+g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t). \tag{10}$$

这里$(B,f',g',h')\in H(A,f,g,h):=\overline{\{(A_\tau,f_\tau,g_\tau,h_\tau)|\tau\in\mathbb{R}\}}$, 其中$A_\tau(t):=A(t+\tau)$, $f_\tau(t):=f(t+\tau)$, $g_\tau(t):=g(t+\tau)$, $h_\tau(t):=h(t+\tau)$, $t\in\mathbb{R}$. 令$V:=H(A,f,g,h)$, $H(A,f,g,h)$ 上的移位动力系统定义为$(V,\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}})$.

定义 7 方程(7) 的解$\varphi\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 称为依分布回复性相容 *(简称为依分布相容)*, 若$\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)}\subseteq\mathfrak{N}_{\mu_\varphi}$. 这里$\mu$ 是φ 的分布, $\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|(A_{t_n},f_{t_n},g_{t_n},h_{t_n})\to(A,f,g,h)\}$, $\mathfrak{N}_{\mu_\varphi}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|\ \beta(\mu(t_n),\mu)\to 0\}$.

注 1 若φ 关于$\alpha\in V$ 是回复性相容的, 且点α 是平稳的*(或者为τ-周期, 概自守, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定)*, 则点φ 也是平稳的*(或者为τ-周期, 概自守, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定)*.

定理 5 假设(A,f,g,h) 是概自守的*(或者为τ-周期, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定)*. 若下列条件成立:

1. 方程(7) 存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解$\varphi(t,x_0,(A,f,g,h))$;
2. 当时间趋于∞ 时, 方程(8) 在$\mathbb{R}$ 上的所有$\mathcal{L}^2$-有界解趋于零, 即若$\varphi(t,x,(A,g))$ 是$\mathcal{L}^2$-有界解, 则

$$\lim_{|t|\to\infty}\|\varphi(t,x,(A,g))\|_2=0.$$

则方程(7) 存在至少一个依分布概自守解*(或者为τ-周期, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定)*.

推论 1 设(A,f,g,h) 是概周期的. 若定理5 的条件成立, 则方程(7) 存在至少一个依分布概自守解.

定义 8 方程(7) 的解$\varphi\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 称为依分布回复性一致相容 *(简称为依分布一致相容)*, 若$\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)}\subseteq\mathfrak{M}_{\mu_\varphi}$且$\varphi$ 的分布μ 唯一. 这里μ 是φ 的分布, $\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|$ 使得序列$\{(A_{t_n},f_{t_n},g_{t_n},h_{t_n})\}$ 收敛$\}$, $\mathfrak{M}_{\mu_\varphi}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|$ 使得序列$\{\varphi_{t_n}\}$ 的分布$\{\mu(t_n)\}$ 弱收敛$\}$.

注 2 若φ 是关于$\alpha\in V$ 回复性一致相容的, 且α 是平稳的*(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, Poisson 稳定)*, 则φ 也是平稳的*(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, Poisson 稳定)*.

定理 6 假设(A,f,g,h) 是概周期的*(或者为τ-周期, 回复)*. 若下列条件成立:

1. 方程(7) 存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解$\varphi(t,x_0,(A,f,g,h))$;
2. 对任意的$B\in H(A)$, 当时间趋于∞ 时, 方程(10) 在$\mathbb{R}$ 上的$\mathcal{L}^2$-有界解趋于零, 即若$\varphi(t,x,(B,g'))$ 是$\mathcal{L}^2$-有界解, 则

$$\lim_{|t|\to\infty}\|\varphi(t,x,(B,g'))\|_2=0.$$

则方程(7) 存在至少一个依分布概周期解(或者为τ-周期, 回复).

关键词:

随机微分方程; 概自守; Lévy 过程; 指数二分; 渐近稳定.

ABSTRACT

Almost Automorphic Solutions for Stochastic Differential Equations

Author Sun Kai

Major Probability Theory and Mathematical Statistics

Tutor Prof. Liu Zhenxin

In this paper, we attempt to investigate the existence, uniqueness and asymptotic stability of almost automorphic solutions for stochastic differential equations. In addition to continuous noise, things may be affected by noise, which is not continuous in the real world, such as earthquakes, tsunamis, typhoons, the financial crisis and the outbreak of epidemics. So far, stochastic differential equation driven by Gaussian noise is widely applied to various continuous noise models by a large number of researchers. For more accurate describing reality of models, researchers began to study stochastic differential equations driven by Poisson processes; further, they investigate stochastic differential equations driven by semimartingales, which are more complex than Poisson processes. Lévy processes form an important class of semimartingales, and they also include Wiener processes and Poisson processes as important special cases. Hence, the stochastic differential equation driven by Lévy noise provides us with a more powerful model and a useful tool. When the differential equation or the system is perturbed by a jump process or, more generally, a Lévy process, the small size jump should affect slightly the almost automorphic property, but the more interesting question is whether the large size jump will appear to destroy almost automorphy. In Chapter 2, we prove the existence and uniqueness of almost automorphic in distribution mild solutions for semilinear stochastic differential equations driven by Lévy noise, and this solution is globally asymptotically stable in square-mean sense. In Chapter 3, we investigate the existence and uniqueness of bounded solution for semilinear stochastic differential equations driven by Lévy noise with exponential dichotomy. From the results of Chapters 2 and 3, we know that the large size jump will not affect the almost automorphy under some suitable conditions. In Chapter 4, we study the existence of solutions for linear stochastic differential equations driven by Gaussian noise, and prove that the stochastic differential equation with almost automorphic (respectively, almost periodic) coefficients admits at least one almost automorphic (respectively, almost periodic)

in distribution solution, if it admits at least one bounded solution, and all bounded solutions of the corresponding homogeneous equation are homoclinic to zero.

The main results of this paper are as follows.

Throughout this paper, we assume that $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ and $(U, |\cdot|_U)$ are two real separable Hilbert spaces, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ is a probability space, and the space $\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ stands for the space of all $\mathbb{H}$-valued random variables Y such that

$$\mathbf{E}\|Y\|^2 = \int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P} < \infty,$$

whose norm is denoted by $\|Y\|_2 := \left(\int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P}\right)^{1/2}$. Let $L(U, \mathbb{H})$ be the space of all bounded linear operators from U to $\mathbb{H}$ equipped with the norm $\|\cdot\|_{L(U,\mathbb{H})}$.

1. Stochastic differential equations driven by Lévy noise

Definition 1 *A stochastic process $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ is said to be* $\mathcal{L}^2$-continuous *if for any $s \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t \to s} \mathbf{E}\|Y(t) - Y(s)\|^2 = 0.$$

It is $\mathcal{L}^2$-bounded *if* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|Y(t)\|_2 < \infty$.

Definition 2 *(1) An $\mathcal{L}^2$-continuous stochastic process $x : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ is said to be* square-mean almost automorphic *if for every sequence of real numbers $\{s'_n\}$, there exist a subsequence $\{s_n\}$ and a stochastic process $y : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ such that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|x(t + s_n) - y(t)\|^2 = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|y(t - s_n) - x(t)\|^2 = 0$$

hold for each $t \in \mathbb{R}$. The collection of all square-mean almost automorphic stochastic processes $x : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ is denoted by $AA(\mathbb{R}; \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$.
(2) A function $g : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to L(U, \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$, $(t, Y) \mapsto g(t, Y)$ is said to be square-mean almost automorphic *in $t \in \mathbb{R}$ for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ if g is continuous in the following sense*

$$\mathbf{E}\|g(t, Y) - g(t', Y')\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} \to 0 \qquad \textit{as } (t', Y') \to (t, Y)$$

and that for every sequence of real numbers $\{s'_n\}$ there exist a subsequence $\{s_n\}$ and a function $\widetilde{g} : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to L(U, \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|g(t+s_n, Y) - \widetilde{g}(t, Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|\widetilde{g}(t-s_n, Y) - g(t, Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} = 0$$

hold for each $t \in \mathbb{R}$ and each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$.

(3) A function $F : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $(t, Y, x) \mapsto F(t, Y, x)$ is said to be Poisson square-mean almost automorphic *in $t \in \mathbb{R}$ for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ if F is continuous in the following sense*

$$\int_U \mathbf{E}\|F(t, Y, x) - F(t', Y', x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) \to 0 \qquad \text{as } (t', Y') \to (t, Y)$$

and that for every sequence of real numbers $\{s'_n\}$, there exist a subsequence $\{s_n\}$ and a function $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ with $\int_U \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) < \infty$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|F(t + s_n, Y, x) - \widetilde{F}(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t - s_n, Y, x) - F(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0$$

for each $t \in \mathbb{R}$ and each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$.

Consider the following semilinear stochastic differential equations driven by Lévy noise

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y(t) =& AY(t)\mathrm{d}t + f(t, Y(t))\mathrm{d}t + g(t, Y(t))\mathrm{d}W(t) \\ &+ \int_{|x|_U<1} F(t, , Y(t-), x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) \\ &+ \int_{|x|_U \geq 1} G(t, Y(t-), x)N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x), \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

where A is an infinitesimal generator which generates a dissipative $\mathcal{C}^0$-semigroup $(T(t)_{t\geq 0})$ on $\mathbb{H}$ such that

$$\|T(t)\| \leq K\mathrm{e}^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0, \tag{2}$$

with $K > 0$, $\omega > 0$; $f : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $g : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to L(U, \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$; W is the Q-Wiener process, N is the Poisson random measure and $\widetilde{N}$ is the compensated Poisson random measure of N. W, N and $\widetilde{N}$ are the Lévy-Itô decomposition components of the two-sided Lévy process L.

Definition 3 *An $\mathcal{F}_t$-progressively measurable stochastic process $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is called a* mild solution *of (1) if it satisfies the corresponding stochastic integral equation*

$$Y(t) =T(t - r)Y(r) + \int_r^t T(t - s)f(s, Y(s))\mathrm{d}s + \int_r^t T(t - s)g(s, Y(s))\mathrm{d}W(s)$$

$$+\int_r^t \int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_r^t \int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

for all $t \geq r$ and each $r \in \mathbb{R}$.

Theorem 1 *Consider (1). Assume that A generates a dissipative $\mathcal{C}^0$-semigroup such that (2) holds, f, g are square-mean almost automorphic in t for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, and F, G are Poisson square-mean almost automorphic in $t \in \mathbb{R}$ for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$. Moreover f, g, F and G satisfy Lipschitz conditions in Y uniformly for t, that is, for all $Y, Z \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ and $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2 \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\mathbf{E}\|(g(t,Y)-g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U<1} \mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U\geq 1} \mathbf{E}\|G(t,Y,x)-G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

for some constant $L > 0$ independent of t. Then (6) *has a unique $\mathcal{L}^{\in}$-bounded mild solution, provided*

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}<\frac{1}{4K^2L}. \tag{3}$$

Furthermore, this unique $\mathcal{L}^2$-bounded solution is almost automorphic in distribution, provided

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{8K^2L}. \tag{4}$$

Definition 4 *A solution $Y(t)$ of (1) is said to be* stable in square-mean sense, *if for arbitrary $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that*

$$\mathbf{E}\|Y_d(t)-Y(t)\|^2 < \epsilon, \quad t \geq 0$$

whenever $\mathbf{E}\|d - Y(0)\|^2 < \delta$, where $Y_d(t)$ stands for the solution of (2.3.1) with initial condition $Y_d(0) = d$. The solution $Y(t)$ is said to be asymptotically stable in square-mean sense *if it is stable in square-mean sense and*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\|Y_d(t)-Y(t)\|^2 = 0. \tag{5}$$

If (5) holds for any $d \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$*, then* $Y(t)$ *is said to be* globally asymptotically stable in square-mean sense.

Theorem 2 . *Assume that the assumptions of Theorem 1 hold. Then the unique* $\mathcal{L}^2$*-bounded solution of (1) is globally asymptotically stable in square-mean sense if (3) is improved to*

$$\frac{1+2b}{\omega^2} + \frac{4}{\omega} < \frac{1}{5K^2L}$$

. *In particular, when (4) holds, this unique* $\mathcal{L}^2$*-bounded solution is both almost automorphic in distribution and globally asymptotically stable in square-mean sense.*

2. Stochastic differential equations driven by Lévy noise with exponential dichotomy

Definition 5 *An evolution family* $\{U(t,s) : t \geq s,\ t,s \in \mathbb{R}\}$ *is said to have an* exponential dichotomy*, if there are projectors* $P(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*, being uniformly bounded and strongly continuous in* t *and two constants* $K \geq 1$ *and* $\omega > 0$ *such that*

1. $P(t)U(t,s) = U(t,s)P(s)$*;*
2. *the restriction* $U_J(t,s) : J(s)\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to J(t)\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ *of* $U(t,s)$ *is invertible (and we set* $U(s,t) := (U_J(t,s))^{-1}$*);*
3. $\|U(t,s)P(s)\| \leq K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}$*, for* $t \geq s$*, and* $\|U(t,s)J(s)\| \leq K\mathrm{e}^{\omega(t-s)}$*, for* $t < s$*,*

where $J(s) = I - P(s)$*.*

Consider the following semilinear stochastic differential equation driven by Lévy noise

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y(t) &= A(t)Y(t)\mathrm{d}t + f(t,Y(t))\mathrm{d}t + g(t,Y(t))\mathrm{d}W(t) \\ &\quad + \int_{|x|_U<1} F(t,Y(t-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \\ &\quad + \int_{|x|_U\geq 1} G(t,Y(t-),x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6}$$

where $f : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $g : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to L(U, \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ are continuous functions; W is the Q-Wiener process, N is the Poisson random measure and $\widetilde{N}$ is the compensated Poisson random measure of N. Note that W, N and $\widetilde{N}$ are the Lévy-Itô decomposition components of the two-sided Lévy process.

We require the following basic assumptions.

(H1) The evolution family $\{U(t,s) : t \geq s,\ t,s \in \mathbb{R}\}$ generated by $A(t)$ is exponential dichotomy, that is, there exist projector $P(t)$, some constants $K \geq 1$ and $\omega > 0$ such that

$$\begin{aligned}\|U(t,s)P(s)\| &\leq Ke^{-\omega(t-s)}, \quad \text{for } t \geq s,\\ \|U(t,s)J(s)\| &\leq Ke^{\omega(t-s)}, \quad \text{for } t \leq s,\end{aligned}$$

where $J(s) = I - P(s)$.

(H2) Suppose $A(t)$ satisfies the 'Acquistapace-Terreni' conditions, $U(t,s)$ is exponential dichotomy and $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in AA(\mathbb{R}; L_b(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})))$. Then for every sequence of real numbers $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, there exist a constant $\delta > 0$ and a subsequence $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that for any $\epsilon > 0$, there exists an $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ such that

$$\|U(t+s_n, s+s_n)P(s+s_n) - U(t,s)P(s)\| \leq \epsilon e^{-\delta(t-s)},$$

for all $n > \mathbf{N}$ and $t \geq s$, moreover

$$\|U(t+s_n, s+s_n)J(s+s_n) - U(t,s)J(s)\| \leq \epsilon e^{\delta(t-s)},$$

for all $n \geq \mathbf{N}$ and $t \leq s$.

(H3) Assume that f, g are square-mean almost automorphic in t for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, and F, G are Poisson square-mean almost automorphic in $t \in \mathbb{R}$ for each $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$. Moreover f, g, F and G satisfy Lipschitz conditions in Y uniformly for t, that is, for all $Y, Z \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ and $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\|f(t,Y) - f(t,Z)\|^2 \leq L\mathbf{E}\|Y - Z\|^2,$$

$$\mathbf{E}\|(g(t,Y) - g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} \leq L\mathbf{E}\|Y - Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U<1} \mathbf{E}\|F(t,Y,x) - F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y - Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U\geq 1} \mathbf{E}\|G(t,Y,x) - G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq L\mathbf{E}\|Y - Z\|^2,$$

for some constant $L > 0$ independent of t.

Definition 6 *An $\mathcal{F}_t$-progressively measurable stochastic process $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is called a* mild solution *of (6) if it satisfies the corresponding stochastic integral equation*

$$Y(t) = U(t,r)Y(r) + \int_r^t U(t,r)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_r^t U(t,r)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)$$

$$+ \int_r^t \int_{|x|_U < 1} U(t,r)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+ \int_r^t \int_{|x|_U \geq 1} U(t,r)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

for all $t \geq r$ and each $r \in \mathbb{R}$.

Theorem 3 *Let (H1) and (H3) be satisfied. Then (6) has a unique $\mathcal{L}^2$-bounded mild solution, provided*

$$\frac{1+2b}{\omega^2} + \frac{2}{\omega} < \frac{1}{16K^2L}.$$

Theorem 4 *Let (H1), (H2) and (H3) be satisfied. Then the unique $\mathcal{L}^2$-bounded mild solution of (6) is almost automorphic in distribution, provided*

$$\frac{1+2b}{\omega^2} + \frac{4}{\omega} < \frac{1}{72K^2L}.$$

3. Linear stochastic differential equation driven by Gaussian noise

Let $L_b(B)$ be the Banach space of all bounded linear operators on a Banach space B equipped with the operator norm. Let $C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n))$ be the space of all continuous operator-valued function $A : \mathbb{R} \to L_b(\mathbb{R}^n)$ equipped with the compact-open topology. Consider the following linear stochastic differential equation driven by Gaussian noise

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}t + g(t)X(t)\mathrm{d}W(t) + h(t)\mathrm{d}W(t) \tag{7}$$

and the corresponding homogenenous equation

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t + g(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \tag{8}$$

where $A \in C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n))$. $f : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $g : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $h : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Along with (7) and (8) we also consider the $H - class$ of (7) and (8), which is the family of equations

$$\mathrm{d}Z(t) = B(t)Z(t)\mathrm{d}t + f'(t)\mathrm{d}t + g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t) + h'(t)\mathrm{d}W(t) \tag{9}$$

and the corresponding homogenenous equation

$$\mathrm{d}Z(t) = B(t)Z(t)\mathrm{d}t + g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t) \tag{10}$$

with $(B, f', g', h') \in H(A, f, g, h) := \overline{\{(A_\tau, f_\tau, g_\tau, h_\tau) | \tau \in \mathbb{R}\}}$, where $A_\tau(t) := A(t + \tau)$, $f_\tau(t) := f(t+\tau)$, $g_\tau(t) := g(t+\tau)$, $h_\tau(t) := h(t+\tau)$ and $t \in \mathbb{R}$. We set $V := H(A, f, g, h)$ and denote the dynamical system of shifts on $H(A, f, g, h)$ by $(V, \{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}})$.

Definition 7 *A solution $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$ of (7) is called* compatible in distribution by the character of recurrence *(or simply,* compatible in distribution*) if $\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)} \subseteq \mathfrak{N}_{\mu_\varphi}$, where μ is the distribution of φ, $\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)} = \{\{t_n\} \subseteq \mathbb{R} | (A_{t_n}, f_{t_n}, g_{t_n}, h_{t_n}) \to (A, f, g, h)\}$ and $\mathfrak{N}_{\mu_\varphi} = \{\{t_n\} \subseteq \mathbb{R} | \beta(\mu(t_n), \mu) \to 0\}$.*

Remark 1 *If φ is comparable with $\alpha \in V$ by the character of recurrence, and α is stationary (respectively, τ-periodic, almost automorphic, Levitan almost periodic, recurrent, Poisson stable), then so is the point φ.*

Theorem 5 *If (A, f, g, h) is almost automorphic (respectively, τ-periodic, Levitan almost periodic, recurrent, Poisson stable). Suppose that the following conditions hold:*

1. *(7) admits an $\mathcal{L}^2$-bounded solution $\varphi(t, x_0, (A, f, g, h))$;*

2. *all the $\mathcal{L}^2$-bounded solutions on $\mathbb{R}$ of (8) tend to zero as the time tends to ∞, i.e.,*

$$\lim_{|t|\to\infty} \|\varphi(t, x, (A, g))\|_2 = 0$$

   if $\varphi(t, x, (A, g))$ is an $\mathcal{L}^2$-bounded solution.

Then (7) admits at least one almost automorphic (respectively, τ-periodic, Levitan almost periodic, recurrent, Poisson stable) in distribution solution.

Corollary 1 *Under the assumptions in Theorem 5, if (A, f, g, h) is almost periodic, then (7) admits at least one almost automorphic in distribution solution.*

Definition 8 *A solution $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$ of (7) is called* uniformly compatible in distribution by the character of recurrence *(or simply,* uniformly compatible in distribution*) if $\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu_\varphi}$, where μ is the distribution of φ, $\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)} = \{\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}|$ such that the sequence $\{(A_{t_n}, f_{t_n}, g_{t_n}, h_{t_n})\}$ is convergent$\}$ and $\mathfrak{M}_{\mu_\varphi} = \{\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}|$ such that the distribution $\{\mu(t_n)\}$ of the sequence $\{\varphi_{t_n}\}$ is weakly convergent$\}$.*

Remark 2 *If φ is uniformly comparable with $\alpha \in V$ by the character of recurrence, and α is stationary (respectively, τ-periodic, recurrent, almost periodic, almost automorphic, Poisson stable), then so is the point φ.*

Theorem 6 *If (A, f, g, h) is almost periodic (respectively, τ-periodic, recurrent). Suppose that the following conditions hold:*

1. *(7) admits an $\mathcal{L}^2$-bounded solution $\varphi(t, x_0, (A, f, g, h))$;*

2. for all $B \in H(A)$ the $\mathcal{L}^2$-bounded solutions on $\mathbb{R}$ of (10) tend to zero as the time tends to ∞, i.e.,

$$\lim_{|t|\to\infty} \|\varphi(t, x, (B, g'))\|_2 = 0$$

if $\varphi(t, x, (B, g'))$ is an $\mathcal{L}^2$-bounded solution.

Then (7) admits at least one almost periodic (respectively, τ-periodic, recurrent) in distribution solution.

Key words:

stochastic differential equation; almost automorphy; Lévy process; exponential dichotomy; asymptotic stability.

目 录

第一章　绪　论

§1.1　随机微分方程

随机微分方程是在关于随机过程的随机积分理论基础上发展起来的一个学科, 是微分方程的扩展, 在数学以外的很多领域中都有着广泛的应用. 随机微分方程可用于对现实世界中遭受到噪音干扰的系统进行建模. 例如,由布朗运动驱动的随机微分方程的模型, 在现代物理学、化学、控制系统、金融经济学、系统生物学等应用性学科中都很常见到.

随机微分方程的描述最早是以布朗运动的形式，由Einstein 在1905年"爱因斯坦奇迹年" (Annus Mirabilis Papers) 《根据分子运动论研究静止液体中悬浮微粒的运动》中提出的. 在1906年, Smoluchowski 独立于Einstein 也描述了布朗运动, 他提出的方程构成了随机过程理论的重要基础. 随后在1908年, 由Perrin 通过实验验证了他们提出的描述布朗运动的方程. 关于布朗运动的研究工作可以追溯到更早一些, 在1900年Bachelier 在他的论文《投机理论》中认为股票市场的波动可以通过构建一个随机过程来模拟, 也就是现在的布朗运动. 关于布朗运动的随机微分方程的研究工作随后由Langevin 继续, 在1908年Langevin 发展了布朗运动的涨落理论. 在1923年Wiener 给出了布朗运动的数学定义, 所以布朗运动也被人们称为Wiener 过程. 此后伊藤清完善了随机微分方程的数学基础, 在1951年伊藤清的著作《On Stochastic Differential Equations》建立了关于布朗运动的随机微分方程理论.

在现实世界中, 除了遭受到连续变化的噪音干扰, 还可能受到不连续的突发性波动干扰, 比如地震、海啸、台风、金融危机、流行病爆发等. 为了对现实世界构建的模型更为精确的描述, 人们开始研究以Poisson 过程为驱动的随机微分方程; 进一步, 研究更为复杂的以半鞅为驱动的随机微分方程. 微分方程和最常见的以布朗运动为驱动的随机微分方程都可以看成是以半鞅为驱动的随机微分方程的特例. Lévy 过程是具有平稳独立增量的随机过程, 它有很多常见的例子, 比如Wiener 过程, Poisson 过程和稳定过程. Lévy 过程的结构包含了很多可以推广到更为广泛的过程类的特征, 比如半

鞅, Feller-Markov 过程和自相似过程. 所以, 以Lévy 过程为驱动的随机微分方程为我们提供了一个更为强大的模型和有力的工具. 关于Lévy 过程的理论和应用可参见Sato [1]; 关于有限维和无限维Lévy 过程的随机微分方程可分别参见Applebaum [2] 与Peszat 和Zabczyk [3].

§1.2 概周期和概自守

在二十世纪二十年代, 丹麦数学家Bohr 和美国数学家Bochner 提出了概周期函数的概念. 概周期描述了一种类似于周期性振荡的现象. 在过去的几十年, 众多学者研究了概周期函数的理论和性质, 并将其用于研究概周期微分方程, 例如见Amerio 和Prouse [4], Bochner [5], Bohr [6], Favard [7, 8], Fink [9], Johnson [10,11], Levitan 和Zhikov [12], Miller [13], Ortega 和Tarallo [14], Pankov [15], Sell [16,17], Yoshizawa [18] 等. 概自守函数是概周期函数的推广. 概自守函数的基本性质和经典研究工作, 可参见Bochner [19,20], Flor [21], Furstenberg 和Weiss [22], Johnson [10], Markley 和Paul [23], N'Guérékata [24], Reich [25], Terras [26, 27], Shen 和Yi [28,29], Veech [30–32] 等. 通过上述的研究我们知道, 每一个概周期点都是回复的; 每一个概周期函数都是概自守的. 最近, Caraballo 和Cheban [33] 研究了不具有Favard 分离性条件的线性微分方程的概周期和概自守解.

在二十世纪四五十年代, 随着日本数学家伊藤清建立关于布朗运动的随机微分方程理论(可参见 [34–37] 等), 随机微分方程被应用于许多领域, 比如物理、随机控制、概率论、金融数学、生物学等. 近几十年来, 关于以Gauss 噪音为驱动的随机微分方程的概周期解和概自守解理论得到了广泛的研究. Halanay [38] 研究了有限维线性非齐次系统概周期解的指数稳定性和指数二分性之间的关系. Arnold 和Tudor [39] 对随机常线性微分方程在分布意义下的概周期解进行了研究. Tudor [40] 与Da Prato 和Tudor [41] 研究了随机发展方程在分布意义下的周期和概周期解. Bezandry 和Diagana [42–44] 研究了随机发展方程在均方意义下的概周期解. Fu 和Liu [45] 引入了概自守过程的概念并对随机微分方程的概自守解进行了研究. Chang 和他的合作者 [46] 研究了随机微分方程的均方概自守解. Cao 和他的合作者 [47] 研究了随机泛函微分方程的概自守解的存在性和稳定性. Cui 和Yan [48] 研究了非自治随机发展方程的概

自守温和解的存在性. Du 和他的合作者 [49] 研究了具有指数二分性的非自治随机微分方程的伪概自守解. Kamenskii 和他的合作者 [50] 与Mellah 和Raynaud de Fitte [51] 认为分布意义下的概周期或概自守解是对随机微分方程解的一种更为合理的定义. 最近, Wang 和Liu [52] 研究了比Gauss 噪音更为广泛的Lévy 噪音驱动的随机微分方程, 并得到了方程概周期温和解的存在性.

带有Gauss 噪音驱动的随机微分方程已经被大量学者广泛应用于各种受到连续扰动的模型中. 现在, 人们开始关注带有跳跃扰动的模型在现实中的应用. 因此, 我们注意到当微分方程或者系统被跳跃噪音或者更一般的Lévy 噪音扰动时, 很小的跳跃应该只会稍微影响概周期性或概自守性, 但是大的跳跃的出现是否会破坏这种回复运动呢? 这是我们感兴趣的问题, 并且对问题的研究可以加深我们对带有跳跃扰动的模型的理解.

§1.3 本文结构

本文主体部分由五章组成. 第一章为绪论, 第二至四章介绍了本文的主要成果, 第五章为结论.

第一章, 主要介绍了论文研究课题的一些背景及预备知识.

第二章, 我们主要研究了以Lévy 噪音为驱动的随机微分方程概自守解的存在性问题. 首先, 我们引入了概自守随机过程和Poisson 概自守的概念. 其次, 我们证明了由无限维Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程依分布概自守解的存在性和唯一性. 此外, 我们还研究了其解的全局渐近稳定性. 最后, 我们给出例子来应用得到的结果.

第三章, 我们主要研究了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程概自守解的存在性问题. 首先, 我们介绍了指数二分性. 其次, 通过应用Banach 不等点定理, 指数二分性和随机分析的一些知识, 我们证明了方程有界解的存在性和唯一性. 而且, 我们在适当的条件下, 可以得到此方程的唯一有界解是依分布概自守的. 最后, 我们举例应用得到的结果.

第四章, 我们研究的是带有概周期和概自守系数的线性随机微分方程概周期和概自守解的存在性. 首先, 我们介绍了依分布回复性相容和一致相容运动. 其次, 我们证明了若带有概周期(概自守)系数的线性随机微分方程存

在一个有界解且其相关齐次方程的所有有界解都同宿趋于零, 则方程至少有一个依分布概周期(概自守)解. 最后, 我们举例应用得到的结果.

第五章, 总结了本论文所做的主要工作及取得的成果, 阐述了创新之处和理论价值.

本论文收录了作者攻读博士学位期间所撰写的论文, 具体可参见文后的附表. 由于作者水平有限, 文中难免出现不当之处, 敬请各位专家不吝批评和指正, 万分感谢!

§1.4 预备知识

在本节中我们将介绍一些本文中用到的背景知识.

在本文中, 设$(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ 和$(U, |\cdot|_U)$ 是两个实可分的Hilbert 空间, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 表示所有使得

$$\mathbf{E}\|Y\|^2 = \int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P} < \infty$$

的$\mathbb{H}$-值随机变量Y 构成的空间, 其范数定义为$\|Y\|_2 := \left(\int_\Omega \|Y\|^2 \mathrm{d}\mathbf{P}\right)^{1/2}$. 设$L(U, \mathbb{H})$ 表示所有从U 到$\mathbb{H}$ 的有界线性算子构成的空间其上范数为$\|\cdot\|_{L(U,\mathbb{H})}$.

定义 1.4.1 (σ-代数) 若Ω 上的$\mathcal{F}$ 子集族满足下列条件, 则$\mathcal{F}$ 称为Ω 上的一个σ-代数.

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;

2. 若$A \in \mathcal{F}$, 则$A^c \in \mathcal{F}$, $A^c := \Omega - A$ 是A 的补集;

3. 若$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, 则$\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{F}$.

定义 1.4.2 (概率测度和概率空间) 设$P(A)$ $(A \in \mathcal{F})$ 是定义在σ-代数$\mathcal{F}$ 上的实值集函数. 若它满足条件: .

1. 若每一$A \in \mathcal{F}$, 有$0 \leq P(A) \leq 1$;

2. $P(\Omega) = 1$;

3. 若$A_1, A_2, \ldots$ 是$\mathcal{F}$ 中互不相交的集合, 则有可列可加性:

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

.

则称$P(\cdot)$ 为$\mathcal{F}$ 上的概率测度, 简称概率. 三元总体$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 称为概率空间.

定义 1.4.3 (随机变量) 设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间. 称可测映射$X : \Omega \to E$ 为一个随机变量.

定义 1.4.4 (数学期望) 设X 是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的随机变量, 则称

$$\mathbf{E}(X) := \int_{\Omega} X \mathrm{d}P$$

为X 的数学期望或均值.

定义 1.4.5 (随机过程) I 为任意非空指标集, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间. 则$\mathbb{R}^n$ 值随机变量族$\{X_t\}_{t\in I}$ 称为一个随机过程.

定义 1.4.6 (随机连续) 一个随机过程$X : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 称为随机连续, 若

$$\lim_{t\to s} P(|X(t) - X(s)| > \epsilon) = 0.$$

定义 1.4.7 (Wiener 过程) 我们称一个实值随机过程$W = (W(t), t \geq 0)$ 是Wiener 过程(或称为Brown 运动), 若:

1. $W(0) = 0$ *(a.s.)*;

2. 对任意的$t \geq s \geq 0$, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$;

3. W 具有独立平稳增量, 即对任意的$0 < t_1 < t_3 < \ldots < t_n$, 随机变量$W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ 相互独立.

定义 1.4.8 (双边Wiener 过程) 设W 为滤概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}})$ 上双边Wiener 过程定义为

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t), & \text{对} t \geq 0, \\ -W_2(-t), & \text{对} t \leq 0, \end{cases}$$

这里W_1 和W_2 是两个独立同分布的*Wiener* 过程.

定义 1.4.9 (Q-Wiener 过程) 一个U-值随机过程$W(t)$, $t \geq 0$ 称为Q-Wiener 过程, 若下列条件成立:

(i) $W(0) = 0$,

(ii) W 具有连续轨道和独立增量,

(iii) $W(t) - W(s)$ 服从$\mathcal{N}(0, (t-s)Q)$, $t \geq s \geq 0$.

更多Q-Wiener 过程的相关知识, 读者可参见 [53].

定义 1.4.10 (Lévy 过程) 我们称一个U-值随机过程$L = (L(t), t \geq 0)$ 是Lévy 过程, 若:

1. $L(0) = 0$ *(a.s.)*;

2. L 具有独立平稳增量, 即对任意的$0 < t_1 < t_3 < \ldots < t_n$, 随机变量$L(t_1), L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ 相互独立, 且$L(t_{i+1}) - L(t_i)$ 与$L(t_{i+1} - t_i) - L(0)$ 同分布;

3. L 是随机连续的, 即对任意的$\epsilon > 0$ 和任意的$s > 0$

$$\lim_{t \to s} P(|L(t) - L(s)|_U > \epsilon) = 0.$$

定义 1.4.11 (双边Lévy 过程) L 是一个在滤概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}})$ 上的双边Lévy 过程, 其定义为

$$L(t) = \begin{cases} L_1(t), & 对 t \geq 0, \\ -L_2(-t), & 对 t \leq 0, \end{cases}$$

其中L_1 和L_2 是两个独立同分布的*Lévy* 过程.

定义 1.4.12 (下方有界) 一个在$U - \{0\}$ 中的*Borel* 集合B 称为下方有界, 若$0 \notin \overline{B}$ *(B 的闭包)*.

定义 1.4.13 (强度测度) $\nu(\cdot) = \mathbf{E}(N(1,\cdot))$ 称为L 的强度测度. 这里定义

$$N(t,B)(\omega) := \sharp\{0 \le s \le t : \Delta L(s)(\omega) \in B\} = \sum_{0\le s\le t} \chi_B(\Delta L(s)(\omega)),$$

其中χ_B 是$U-\{0\}$ 上的$Borel$ 集合B 的示性函数, $\Delta L(t) = L(t) - L(t-)$, 任意$t \ge 0$.

定义 1.4.14 (Poisson 随机测度) $N(t,B)$ 称为Poisson 随机测度, 若对任意$t \ge 0$, B 是下方有界的.

定义 1.4.15 (补偿Poisson 随机测度) 对任意的$t \ge 0$ 和下方有界的B, 我们定义补偿Poisson 随机测度为

$$\widetilde{N}(t,B) = N(t,B) - t\nu(B).$$

命题 1.4.1 (Lévy-Itô 分解) 若L 是一个U-值$Lévy$ 过程, 则存在$a \in U$, 一个带有协方差算子Q 的U-值$Wiener$ 过程W 和在$\mathbb{R}^+ \times (U-\{0\})$ 上一个独立的$Poisson$ 随机测度使得, 对任意的$t \ge 0$ 有

$$L(t) = at + W(t) + \int_{|x|_U<1} x\widetilde{N}(t,\mathrm{d}x) + \int_{|x|_U\ge 1} xN(t,\mathrm{d}x), \tag{1.3.1}$$

其中$\widetilde{N}$ 为N 的补偿$Poisson$ 随机测度.

在本文中,我们还有以下的假设:

(A1) 我们考虑的Lévy 过程为U-值的.

(A2) 我们考虑的Poisson 随机测度N 含有的强度测度ν 满足

$$\int_U (|y|_U^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty. \tag{1.3.2}$$

(A3) 我们考虑的Wiener 过程是Q-Wiener 过程, 其协方差算子Q 满足Tr$Q < \infty$.

注 1.4.1 由(1.3.2), 我们可以得到$\int_{|x|_U\ge 1}\nu(\mathrm{d}x) < \infty$. 为方便起见, 在本文中我们定义

$$b := \int_{|x|_U\ge 1} \nu(\mathrm{d}x).$$

注 1.4.2 注意到对于$s \in \mathbb{R}$, 在$\widetilde{L}(t) := L(t+s) - L(s)$ 定义下的随机过程$\widetilde{L} = (\widetilde{L}(t), t \in \mathbb{R})$ 也是一个与L 同分布的双边*Lévy* 过程. 特别地, 当$s \in \mathbb{R}^+$, 类似的结论也同样适用于单边*Lévy* 过程.

定理 1.4.1 (Lebesgue 控制收敛定理) 设$\{f_n\}_{\in\mathbb{R}}$ 是一列定义在A 上的可测函数且逐点收敛于f *a.e.*, $g \geq 0$ 是A 上可积函数且$|f_n| \leq g$ *a.e.* $(n \in \mathbb{R})$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 1.4.2 (Hölder 不等式) 对正数$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 且$f \in L^p$, $g \in L^q$, 则有$fg \in L^1$,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |g(x)|^q\right)^{1/q}.$$

定理 1.4.3 (Cauchy-Schwarz 不等式) 对内积空间中任意向量X 和Y, 有

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|.$$

定理 1.4.4 (Banach 不动点定理) 设(B, d) 为非空的完备度量空间. $T : B \to B$ 为B 上的一个压缩映射, 即存在非负常数$q < 1$, 使得对所有B 内的x 和y 都有

$$d(T(x), T(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

则映射T 在B 内有且只有一个不动点x^*, 也就是$Tx^* = x^*$.

定理 1.4.5 (Ito 等距) *1.* 设$W = (W(t), t \geq 0)$ 是实值*Wiener* 过程, $F(t)$, $t \geq 0$ 为一个随机过程, 则

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t F(s)\mathrm{d}W(s)\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t F^2(s)\mathrm{d}s\right];$$

2. 设$G = (G(t, z), t \geq 0, z \in U)$ 为一个随机过程, $\widetilde{N}$ 为补偿*Poisson* 随机测度, ν 为其相关的强度测度, 则

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \int_U G(s, z)\widetilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t \int_U G^2(s, z)\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right].$$

引理 1.4.1 (Gronwall 引理) 设$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个非负连续函数使得对任意$t\in\mathbb{R}$ 有

$$g(t)\leq\alpha(t)+\beta_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_1(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s+\cdots+\beta_n\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_n(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s,\qquad(1.3.3)$$

其中函数$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 常数$\beta_1,\ldots,\beta_n\geq0$, 常数$\delta_1,\ldots,\delta_n>\beta$ 其中$\beta:=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$. 我们设不等式(1.3.3) 右边的积分是收敛的. 令$\delta:=\min_{1\leq i\leq n}\delta_i$. 则对任意使得$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\gamma s}\alpha(s)\mathrm{d}s$ 收敛的$\gamma\in(0,\delta-\beta]$, 我们有

$$g(t)\leq\alpha(t)+\beta\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\alpha(s)\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

特别地, 若α 为常数时, 我们有

$$g(t)\leq\alpha\,\frac{\delta}{\delta-\beta}.$$

定理 1.4.6 (Tychonoff 定理) 任意个紧致空间的乘积空间关于乘积拓扑是紧致的.

定义 1.4.16 (一致胎紧) 测度空间上的S 测度族μ 称为一致胎紧的, 若对任意$\epsilon>0$, 存在紧集$K_\epsilon\subseteq S$ 使得$\mu(S-K_\epsilon)<\epsilon$.

定义 1.4.17 (弱相对紧) 假设S 为度量空间. 令$\mathcal{P}(S)$ 为所有定义在S 上的概率测度构成的集. 概率测度$K\subset\mathcal{P}(S)$ 集称为弱相对紧的, 若K 中任意列$\{P_n\}$ 都存在弱收敛子列.

定理 1.4.7 (Prohorov 定理) 假设S 为完备可分的度量空间. 则概率测度集$K\subset\mathcal{P}(S)$ 是一致胎紧的当且仅当K 弱相对紧.

引理 1.4.2 (Chebyshev 不等式) 假设(X,Σ,μ) 为度量空间, f 为定义在X 上的广义实值可测函数. 则对任意实数$\delta>0$

$$\mu(\{x\in X:|f(x)|\geq\delta\})\leq\frac{1}{\delta^2}\int_X|f|^2\mathrm{d}\mu.$$

注 1.4.3 关于*Tychonoff* 定理, *Prohorov* 定理和*Chebyshev* 不等式的相关内容, 读者可分别参见 *[54–56]*.

定义 1.4.18 (左理想) 一个非空子集I 为半群$\mathcal{E}$ 中左理想 若有$\mathcal{E}I \subset I$, 这里$\mathcal{E}I := \{\xi \circ \eta : \xi \in \mathcal{E}, \eta \in I\}$, 且$\xi \circ \eta$ 是ξ 和η 的复合定义如下:

$$(\xi \circ \eta)(x) := \xi(\eta(x)), \text{ 对} x \in X.$$

注 1.4.4

1. 一个左理想称为最小左理想 若它不包含任何的真左理想.

2. 半群$\mathcal{E}$ 中元素$u \in \mathcal{E}$ 称为幂等元 若$u^2 = u$.

3. 任意紧半群中都包含至少一个最小左理想.

4. 任意紧半群中都包含至少一个幂等元.

   更多最小左理想的相关知识, 读者可参见 [57, 58].

引理 1.4.3 假设I 为半群S 的左理想. 则下列等价关系成立:

1. I 为最小左理想;

2. 对任意的$x \in I$ 有$Ix = I$;

3. 对任意的$x \in I$ 有$Sx = I$.

第二章　Lévy 噪音驱动的随机微分方程的概自守解

在本章中, 我们研究了以Lévy 噪音为驱动的随机微分方程概自守解的存在性问题. 首先, 我们引入了概自守随机过程和Poisson 概自守的概念. 其次, 我们证明了由无限维Lévy 噪音驱动的一类半线性随机微分方程的依分布概自守解的存在性. 此外, 我们还研究了其解的全局渐近稳定性.

本章第一节介绍了以Lévy 噪音为驱动的随机微分方程; 第二节证明了在一定条件下, 以Lévy 噪音为驱动的随机微分方程的依分布概自守解的存在性; 第三节研究了方程依分布概自守解的全局渐近稳定性. 第四节, 我们给出三个例子来应用本章得到的结果.

§2.1　Lévy 噪音驱动的随机微分方程

我们考虑如下由$\mathbb{H}$-值随机过程X 构成的以Lévy 噪音为驱动的随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = f(t, X(t))\mathrm{d}t + g(t, X(t))\mathrm{d}L(t),$$

其中f 是$\mathbb{H}$-值的, L 是一个U-值Lévy 过程, g 是$L(U, \mathbb{H})$-值的. 由Lévy-Itô 分解定理(1.3.1), 方程可以写成如下形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t) = &(f(t, X(t)) + g(t, X(t))a)\mathrm{d}t + g(t, X(t))\mathrm{d}W(t)\\ &+ \int_{|x|_U<1} g(t, X(t-))x\ \widetilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) + \int_{|x|_U\geq 1} g(t, X(t-))x\ N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x).\end{aligned}$$

因此我们通常考虑的Lévy 噪音下的随机微分方程有更一般的形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t) = &f(t, X(t))\mathrm{d}t + g(t, X(t))\mathrm{d}W(t)\\ &+ \int_{|x|_U<1} F(t, X(t-), x)\ \widetilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) + \int_{|x|_U\geq 1} G(t, X(t-), x)\ N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

其中F 和G 是$\mathbb{H}$-值的.

§2.2 均方概自守与依分布概自守

§2.2.1 均方概自守

定义 2.2.1 随机过程$Y:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 称为$\mathcal{L}^2$-连续, 若对任意的$s\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to s}\mathbf{E}\|Y(t)-Y(s)\|^2=0.$$

若$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2<\infty$, 则称其为$\mathcal{L}^2$-有界.

注意到若一个$\mathbb{H}$-值过程是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则它必是随机连续的.

定义 2.2.2 *(1)* $\mathcal{L}^2$-连续的随机过程$x:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 称为均方概自守, 若对每一个实数列$\{s_n'\}$, 都存在一个子列$\{s_n\}$ 和一个随机过程$y:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|x(t+s_n)-y(t)\|^2=0 \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|y(t-s_n)-x(t)\|^2=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 上都成立. 令$AA(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 表示所有均方概自守随机过程$x:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$构成的集合.
(2) 函数$g:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $(t,Y)\mapsto g(t,Y)$ 称为均方概自守, 若g 按下述意义连续

$$\mathbf{E}\|g(t,Y)-g(t',Y')\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\to 0, \qquad \text{当}(t',Y')\to(t,Y)\text{时},$$

并且对任意实数列$\{s_n'\}$ 都存在子列$\{s_n\}$ 和函数$\widetilde{g}:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|g(t+s_n,Y)-\widetilde{g}(t,Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0 \ \text{且}\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|\widetilde{g}(t-s_n,Y)-g(t,Y)\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$上都成立.
(3) 函数$F:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $(t,Y,x)\mapsto F(t,Y,x)$ 称为Poisson 均方概自守, 若F 按下述意义连续

$$\int_U\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t',Y',x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\to 0, \qquad \text{当}(t',Y')\to(t,Y)\text{时},$$

并且对任意实数列$\{s_n'\}$ 都存在子列$\{s_n\}$ 和满足$\int_U \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty$ 的函数$\widetilde{F}:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_U \mathbf{E}\|F(t+s_n,Y,x)-\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_U \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t-s_n,Y,x)-F(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

在任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上都成立.

注 2.2.1 任意均方概自守过程都是$\mathcal{L}^2$-有界的. 事实上, 由 *[45]*, 对于$Y\in AA(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $AA(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 在

$$\|Y\|_\infty:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2=\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathbf{E}\|Y(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

意义下是一个*Banach* 空间. 同样的, 任意均方概自守函数$g:\mathbb{R}\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 也是有界的, 即$\sup_{s\in\mathbb{R}}\|g(s)\|_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}<\infty$.

命题 2.2.1 [45] 若$f:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $(t,Y)\mapsto f(t,Y)$ 是均方概自守的, 并且f 满足如下的*Lipschitz* 条件:

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2\le L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2$$

对任意的$Y,Z\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 和$t\in\mathbb{R}$ 成立, 其中$L>0$ 与t 无关. 则对于任意的均方概自守过程$Y:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, 定义为$F(t):=f(t,Y(t))$ 的随机过程$F:\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 是均方概自守的.

Poisson 均方概自守函数有如下的性质.

命题 2.2.2 若$F,F_1,F_2:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 是*Poisson* 均方概自守函数, 则

1. F_1+F_2 是*Poisson* 均方概自守的.
2. 对任意的纯量λ, λF 是*Poisson* 均方概自守的.

3. 对任意的$Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, 存在常数$M = M(Y) > 0$ 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_U \mathbf{E}\|F(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) \le M.$$

证明 由于性质(1) 和(2) 是显然的, 我们只证明性质(3). 若

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_U \mathbf{E}\|F(t, Y_0, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = \infty$$

对于某个$Y_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 成立, 则存在一个实数列$\{s'_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|F(s'_n, Y_0, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = \infty.$$

由于F 是Poisson 均方概自守的, 则存在子列$\{s_n\} \subset \{s'_n\}$ 和一个函数$\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 使得对任意的$t \in \mathbb{R}$ 和$Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|F(t + s_n, Y, x) - \widetilde{F}(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0. \tag{2.2.1}$$

注意到$\int_U \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) < \infty$ 对所有的$t \in \mathbb{R}$ 和$Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 都成立; 特别地, 在(2.2.1) 中当$t = 0$ 和$Y = Y_0$ 时, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|F(s_n, Y_0, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

这与已知条件矛盾. □

命题 2.2.3 设$F : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $(t, Y, x) \mapsto F(t, Y, x)$ 是*Poisson* 均方概自守的, 并且F 满足如下的*Lipschitz* 条件:

$$\int_U \mathbf{E}\|F(t, Y, x) - F(t, Z, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) \le L\mathbf{E}\|Y - Z\|^2$$

对任意的$Y, Z \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 和$t \in \mathbb{R}$都成立, 其中$L > 0$ 与t 无关. 则对任意的随机过程$Y : \mathbb{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, 定义为$D(t, x) := F(t, Y(t), x)$ 的函数$D : \mathbb{R} \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 是*Poisson* 均方概自守的.

证明 设$\{s'_n\}$ 是一个实数列. 由已知F 是Poisson 均方概自守的并且Y 也是均方概自守的, 则存在$\{s'_n\}$ 的子列$\{s_n\}$ 和函数$\widetilde{F}$, Z 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|F(t + s_n, Y, x) - \widetilde{F}(t, Y, x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0, \tag{2.2.2}$$

对所有的$t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 都成立，并且

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|Y(t+s_n) - Z(t)\|^2 = 0 \tag{2.2.3}$$

对任意的$t \in \mathbb{R}$ 成立.

现在我们考虑函数$\widetilde{D}: \mathbb{R} \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 定义为$\widetilde{D}(t,x) := \widetilde{F}(t, Z(t), x)$. 注意到

$$\begin{aligned}
&D(t+s_n, x) - \widetilde{D}(t,x)\\
=&F(t+s_n, Y(t+s_n), x) - F(t+s_n, Z(t), x) + F(t+s_n, Z(t), x) - \widetilde{F}(t, Z(t), x),
\end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
&\int_U \mathbf{E}\|D(t+s_n, x) - \widetilde{D}(t,x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\\
\leq& 2\int_U \mathbf{E}\|F(t+s_n, Y(t+s_n), x) - F(t+s_n, Z(t), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\\
&+ 2\int_U \mathbf{E}\|F(t+s_n, Z(t), x) - \widetilde{F}(t, Z(t), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\\
\leq& 2L\mathbf{E}\|Y(t+s_n) - Z(t)\|^2 + 2\int_U \mathbf{E}\|F(t+s_n, Z(t), x) - \widetilde{F}(t, Z(t), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

我们可以从(2.2.2) 和(2.2.3) 推断出, 对任意的$t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|D(t+s_n, x) - \widetilde{D}(t,x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0.$$

类似的, 我们还可以证明对任意的$t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{E}\|\widetilde{D}(t-s_n, x) - D(t,x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x) = 0$. 综上所述, $D(t,x)$ 是均方概自守的. □

§2.2.2 依分布概自守

下面我们来介绍依分布概自守的定义. 设$\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 表示在$\mathbb{H}$ 上的所有Borel 概率测度构成的空间, 其上的β 度量为:

$$\beta(\mu, \nu) := \sup\left\{\left|\int f \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\nu\right| : \|f\|_{BL} \leq 1\right\}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{H}),$$

这里f 是$\mathbb{H}$ 上的Lipschitz 连续的实值函数, 其上的范数为

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty, \|f\|_L = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}, \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{H}}|f(x)|.$$

序列$\{\mu_n\}\subset\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 称为弱收敛到μ, 若$\int f\mathrm{d}\mu_n \to \int f\mathrm{d}\mu$ 对所有的$f\in C_b(\mathbb{H})$ 成立. $C_b(\mathbb{H})$ 表示在$\mathbb{H}$ 上所有有界连续实值函数构成的空间. 我们知道β 度量是$\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 上的一个完备度量, 并且$\{\mu_n\}$ 弱收敛到μ 当且仅当$\beta(\mu_n,\mu)\to 0$, 当$n\to\infty$ 时. 更多关于β 度量的细节和其相关的性质读者可以参考 [56, §11.3].

定义 2.2.3 $\mathbb{H}$-值随机过程$Y(t)$ 称为依分布概自守, 若其分布$\mu(t)$ 是一个$\mathcal{P}(\mathbb{H})$-值概自守映射, 即对任意实数列$\{s'_n\}$, 存在子列$\{s_n\}$ 和一个$\mathcal{P}(\mathbb{H})$-值映射$\tilde{\mu}(t)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\beta(\mu(t+s_n),\tilde{\mu}(t))=0 \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty}\beta(\tilde{\mu}(t-s_n),\mu(t))=0$$

对任意$t\in\mathbb{R}$ 成立.

注 2.2.2 我们回忆一下依分布收敛的概念, 一列随机变量$\{X_n\}$ 称为依分布收敛到随机变量X 若其分布$\{\mu_n\}$ 弱收敛到X 的分布μ, 即$\beta(\mu_n,\mu)\to 0$. 对于一列随机变量来说$\mathcal{L}^2$ 收敛可以推出依分布收敛, 所以一个均方概自守随机过程必然是依分布概自守的; 但是反之不真.

注 2.2.3 我们定义的依分布概自守过程是对于 [39, 40, 59] 中依分布概周期过程的进一步推广. 相对于 [39,40,59] 中的依分布概周期过程定义, 在 [41] 中作者考虑了一种更强的定义; 更多的细节可以参考 [41]. 如果我们像 [41] 中一样定义的分布概自守过程, 那么注2.2.2 是不真的, 即均方概自守不能推出依分布概自守.

§2.3 Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程的概自守解

在本节中我们考虑如下的半线性随机微分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) =& AY(t)\mathrm{d}t + f(t,Y(t))\mathrm{d}t + g(t,Y(t))\mathrm{d}W(t) \\ &+ \int_{|x|_U<1} F(t,,Y(t-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$+\int_{|x|_U\geq 1} G(t,Y(t-),x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \qquad t\in\mathbb{R},$$

这里A 是在$\mathbb{H}$ 上生成耗散$\mathcal{C}^0$-半群$(T(t)_{t\geq 0})$ 的无穷小生成元, 其满足

$$\|T(t)\|\leq K\mathrm{e}^{-\omega t}, \qquad \forall t\geq 0, \tag{2.3.2}$$

其中$K>0$, $\omega>0$; $f:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $g:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\to L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$, $F:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, $G:\mathbb{R}\times\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})\times U\to\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$; W 是Q-Wiener 过程, N 是Poisson 随机测度, $\widetilde{N}$ 是N 的补偿Poisson 随机测度. W, N 和$\widetilde{N}$ 可通过双边Lévy 过程L 经Lévy-Itô 分解得到.

定义 2.3.1 $\mathcal{F}_t$-循序可测随机过程$\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为方程(2.3.1) 的温和解, 若其满足相应的随机积分方程

$$\begin{aligned}Y(t)=&T(t-r)Y(r)+\int_r^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s+\int_r^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\&+\int_r^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\&+\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

对任意的$t\geq r$ 和$r\in\mathbb{R}$ 成立.

定理 2.3.1 考虑方程(2.3.1). 设A 生成一个耗散$\mathcal{C}^0$-半群使得(2.3.2) 成立, f, g 是均方概自守的, F 和G 是*Poisson* 均方概自守的. 而且f, g, F 和G 是关于Y 满足*Lipschitz* 条件且*Lipschitz* 常数与t 无关, 即对任意的$Y,Z\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 和$t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2, \tag{2.3.4}$$

$$\mathbf{E}\|(g(t,Y)-g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2, \tag{2.3.5}$$

$$\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2, \tag{2.3.6}$$

$$\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,Y,x)-G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2, \tag{2.3.7}$$

其中$L>0$ 为与t 无关的常数. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}<\frac{1}{4K^2L}, \tag{2.3.8}$$

则(2.3.1) 存在一个唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解. 进一步, 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{8K^2L}, \tag{2.3.9}$$

则这个唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是依分布概自守的.

证明 首先我们注意到若$Y(t)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则$Y(t)$ 是方程(2.3.1) 的温和解当且仅当其满足下列积分方程

$$\begin{aligned} Y(t)=&\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\ &+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

对于定理的证明, 我们将分为三部分进行.

第一部分. $\mathcal{L}^2$-有界解必是$\mathcal{L}^2$-连续的. 这个结论就本身而言是很有趣的, 所以我们在更一般的假设下进行证明: 我们仅设$T(t)$ 是一个$\mathcal{C}^0$-半群, 不必是耗散的. 根据 [60, 第1 章, 定理2.2], 存在常数$M>0$ 和$\delta>0$ 使得$\|T(t)\|\leq M\mathrm{e}^{\delta t}$ 对任意的$t\geq 0$ 成立. 若$Y(t)$ 是方程(2.3.1) 的$\mathcal{L}^2$-有界解, 即(2.3.3) 成立, 则根据Cauchy-Schwarz 不等式, Itô 等距和Poisson 随机测度积分的性质, 当$t\geq r$ 时

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2\\ \leq&5\mathbf{E}\|T(t-r)Y(r)-Y(r)\|^2+5\mathbf{E}\left\|\int_r^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s\right\|^2\\ &+5\mathbf{E}\left\|\int_r^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\right\|^2+5\mathbf{E}\left\|\int_r^t\int_{|x|_U<1}T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\ &+5\mathbf{E}\bigg\|\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)G(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &\quad+\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)G(s,Y(s-),x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\bigg\|^2\\ \leq&5\mathbf{E}\|T(t-r)Y(r)-Y(r)\|^2+5M^2\mathrm{e}^{2\delta(t-r)}\int_r^t 1\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\mathbf{E}\|f(s,Y(s))\|^2\mathrm{d}s\\ &+5M^2\mathrm{e}^{2\delta(t-r)}\int_r^t\mathbf{E}\|g(s,Y(s))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+5M^2\mathrm{e}^{2\delta(t-r)}\int_r^t\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&+5M^2\mathrm{e}^{2\delta(t-r)}\bigg[2\int_r^t\int_{|x|_U\geq1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_r^t\int_{|x|_U\geq1}1\ \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\int_{|x|_U\geq1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\bigg].
\end{aligned}
$$

由已知$T(\cdot)$ 是一个$\mathcal{C}^0$-半群, 则当$t\to r^+$ 时, $\|T(t-r)x-x\|\to 0$ 对任意的$x\in\mathbb{H}$ 成立. 注意到

$$\|T(t-r)-Id\|^2\mathbf{E}\|Y(r)\|^2<\infty,$$

所以根据Lebesgue 控制收敛定理, 我们有当$t\to r^+$ 时, $\mathbf{E}\|T(t-r)Y(r)-Y(r)\|^2\to 0$. 因为$f$ 关于Y 是Lipschitz 的并且是均方概自守的, 再注意到$Y(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 根据注2.2.1 我们有

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s,Y(s))\|_2\leq&\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s,Y(s))-f(s,0)\|_2+\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s,0)\|_2\\
\leq&\sqrt{L}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|Y(s)\|_2+\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s,0)\|_2<\infty,
\end{aligned}
$$

即

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|f(s,Y(s))\|^2<\infty; \tag{2.3.11}$$

同样的我们还可以得到

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|g(s,Y(s))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}<\infty. \tag{2.3.12}$$

由(2.3.6), 命题2.2.2 (3) 和$Y(\cdot)$ 的$\mathcal{L}^2$-有界性, 可以推出存在常数$M_0>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq&2\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s),x)-F(s,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\\
&+2\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\\
\leq&2L\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|Y(s)\|^2+M_0<\infty;
\end{aligned}\tag{2.3.13}
$$

类似的有

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U\geq1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty. \tag{2.3.14}$$

因此

$$\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2 \to 0, \qquad 当 t \to r^+ 时.$$

通过上面的论述, 我们按照同样的方法还可以得到当$t \to r^-$ 时, $\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2 \to 0$. 综上所述, $Y(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-连续的.

第二部分. $\mathcal{L}^2$-有界解的存在唯一性. 令$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 表示所有从$\mathbb{R}$ 到$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 的有界$\mathcal{L}^2$-连续映射构成的Banach 空间, 其上范数为$\|\cdot\|_\infty$. 下面我们考虑作用在$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的非线性算子$\mathcal{S}$, 其定义为

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}Y)(t) := &\int_{-\infty}^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\ &+ \int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &+ \int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

由(2.3.2) 和(2.3.11)-(2.3.14), 我们可以推得若$Y(\cdot)$ 是一个$\mathcal{L}^2$-有界过程, 则$(\mathcal{S}Y)(\cdot)$ 是一个$\mathcal{L}^2$-连续过程. 注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|(\mathcal{S}Y)(t)-(\mathcal{S}Y)(r)\|^2 \leq &4\mathbf{E}\left\|\int_r^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s\right\|^2\\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_r^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_r^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2.\end{aligned}$$

所以, 由第一部分的证明: 若$Y(\cdot)$ 是一个$\mathcal{L}^2$-有界过程, 则$(\mathcal{S}Y)(\cdot)$ 是一个$\mathcal{L}^2$-连续过程. 因此算子$\mathcal{S}$ 是一个把$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 映到本身的映射. 若$\mathcal{S}$ 是在$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的一个压缩映射, 根据Banach 不动点定理, 我们就可以推出方程(2.3.1) 有唯一的有界$\mathcal{L}^2$-连续温和解.

我们现在来证明$\mathcal{S}$ 是一个在$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的压缩映射. 对于$Y_1,Y_2 \in C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 和$t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\mathbf{E}\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|^2$$

$$
\begin{aligned}
=&\mathbf{E}\bigg\| \int_{-\infty}^{t} T(t-s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s \\
&+\int_{-\infty}^{t} T(t-s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s) \\
&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} T(t-s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\bigg\|^2 \\
\leq&4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} T(t-s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

类似于 [45, 定理4.2] 的证明, 通过Cauchy-Schwarz 不等式上述不等式右端的第一部分可以得到如下估计

$$
\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2 \leq \frac{K^2L}{\omega^2}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|^2,
$$

第二部分有如下估计

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2 \\
\leq&K^2\left(\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|(g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\right) \\
\leq&\frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

对于第三和第四部分, 由Poisson 随机测度随机积分的性质和Cauchy-Schwarz 不等式, 我们分别有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} T(t-s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2 \\
\leq&K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathrm{d}s\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2\\
&\le\frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\ge1}T(t-s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\le&2\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\ge1}T(t-s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+2\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\ge1}T(t-s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right\|^2\\
\le&\frac{K^2L}{\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2\\
&+2K^2\mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\ge1}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-s)}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-s)}{2}}\|G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)\|\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right)^2\\
\le&\frac{K^2L}{\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2+2K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\mathrm{d}s\cdot b\\
&\cdot\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\ge1}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
\le&\left(\frac{K^2L}{\omega}+\frac{2K^2Lb}{\omega^2}\right)\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

综上所述, 对任意的$t\in\mathbb{R}$,

$$
\mathbf{E}\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|^2\le\left[\frac{4K^2L}{\omega^2}(1+2b)+\frac{8K^2L}{\omega}\right]\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
$$

也就是说,

$$
\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|_2^2\le\eta\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2^2 \tag{2.3.15}
$$

其中$\eta:=\frac{4K^2L}{\omega^2}(1+2b)+\frac{8K^2L}{\omega}$. 注意到

$$
\sup_{s\in\mathbb{R}}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2^2\le(\sup_{s\in\mathbb{R}}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2)^2,
$$

通过(2.3.15), 我们可以推得对任意的$t\in\mathbb{R}$

$$
\|\mathcal{S}(Y_1)(t)-\mathcal{S}(Y_2)(t)\|_2\le\sqrt{\eta}\,\|Y_1-Y_2\|_\infty.
$$

因此

$$\|\mathcal{S}Y_1-\mathcal{S}Y_2\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\mathcal{S}(Y_1)(t)-\mathcal{S}(Y_2)(t)\|_2\le\sqrt{\eta}\;\|Y_1-Y_2\|_\infty.$$

由于$\eta<1$, 所以我们可推得$\mathcal{S}$ 是一个在$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的压缩映射. 综上所述, 方程(2.3.1) 存在唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解$v\in C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 使得$\mathcal{S}v=v$.

第三部分. $\mathcal{L}^2$-有界解的概自守性. 设$\{s_n'\}$ 是任意实数列. 由已知f,g 是均方概自守的, F,G 是Poisson 均方概自守的, 则存在$\{s_n'\}$ 的子列$\{s_n\}$ 和函数$\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|f(t+s_n,Y)-\widetilde{f}(t,Y)\|^2=0,\qquad\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|\widetilde{f}(t-s_n,Y)-f(t,Y)\|^2=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|(g(t+s_n,Y)-\widetilde{g}(t,Y))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\|(\widetilde{g}(t-s_n,Y)-g(t,Y))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t+s_n,Y,x)-\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|\widetilde{F}(t-s_n,Y,x)-F(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0;$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U\ge1}\mathbf{E}\|G(t+s_n,Y,x)-\widetilde{G}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U\ge1}\mathbf{E}\|\widetilde{G}(t-s_n,Y,x)-G(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

对任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 成立.

令$\tilde{Y}(\cdot)$ 满足积分方程[1]

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(t):=&\int_{-\infty}^t T(t-s)\widetilde{f}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^t T(t-s)\widetilde{g}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}W(s)\\&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}T(t-s)\widetilde{F}(s,\tilde{Y}(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

[1]注意到$\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{F},\widetilde{G}$ 关于Y 是Lipschitz 连续的, 且和(2.3.4)-(2.3.7) 中f,g,F,G 拥有同样的Lipschitz 常数L, 而且用$\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{F},\widetilde{G}$ 分别代替不等式(2.3.11)-(2.3.14) 中的f,g,F,G 不等式仍然成立. 所以通过第一和第二部分的证明, 此方程有唯一$\mathcal{L}^2$-有界解.

$$+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)\widetilde{G}(s,\tilde{Y}(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

令$W_n(\sigma):=W(\sigma+s_n)-W(s_n)$, $N_n(\sigma,x):=N(\sigma+s_n,x)-N(s_n,x)$, $\widetilde{N}_n(\sigma,x):=\widetilde{N}(\sigma+s_n,x)-\widetilde{N}(s_n,x)$ 其中$\sigma\in\mathbb{R}$. 根据注1.4.2, W_n 是一个与W 同分布的Q-Wiener 过程, N_n 是一个与N 同分布的Poisson 随机测度, $\widetilde{N}_n$ 是其补偿Poisson 随机测度. 令$\sigma=s-s_n$, 则

$$\begin{aligned}Y(t+s_n)=&\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)f(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}\sigma\\&+\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)g(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}W_n(\sigma)\\&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}T(t-\sigma)F(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)\widetilde{N}_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}T(t-\sigma)G(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)N_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

类似 [50] 中的证明, 我们考虑的$Y_n(\cdot)$ 满足积分方程

$$\begin{aligned}Y_n(t)=&\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}\sigma+\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\\&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}T(t-\sigma)F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\&+\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}T(t-\sigma)G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

注意到对任意的$t\in\mathbb{R}$, $Y(t+s_n)$ 与$Y_n(t)$ 同分布. 类似于$\tilde{Y}(\cdot)$, 上述的$Y_n(\cdot)$ 也是唯一且$\mathcal{L}^2$-有界的.

注意到

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\\\leq&4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)[f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)[g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}T(t-\sigma)[F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-\widetilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
=&:I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

根据Cauchy-Schwarz 不等式,

$$
\begin{aligned}
I_1\leq&8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)[f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}T(t-\sigma)[f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\
\leq&8\mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{t}\|T(t-\sigma)\|\cdot\|f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|\mathrm{d}\sigma\right)^2\\
&+8\mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{t}\|T(t-\sigma)\|\cdot\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|\mathrm{d}\sigma\right)^2\\
\leq&8K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+8K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
\leq&\frac{8K^2L}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_1^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathcal{E}_1^n:=\frac{8K^2}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma.
$$

注意到

$$
\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(0))\|_2\leq\sqrt{L}\|\tilde{Y}(\sigma)-\tilde{Y}(0)\|_2,
$$

所以根据注2.2.1, 我们有

$$
\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|_2<\infty,
$$

并且因此有

$$
\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\|\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|_2<\infty.
$$

由已知f 是均方概自守的并且$\tilde{Y}(\cdot)$ 在$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上有界. 因此, 由Lebesgue 控制收敛定理可以推出当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_1^n\to 0$.

根据Ito 等距, 我们有

$$\begin{aligned}I_2 \leq& 8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)[g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)[g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\\leq& 8\mathbf{E}\int_{-\infty}^{t}\|T(t-\sigma)\|^2\cdot\|(g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\&+8\mathbf{E}\int_{-\infty}^{t}\|T(t-\sigma)\|^2\cdot\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\\leq& 8K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_2^n.\end{aligned}$$

这里类似于$\mathcal{E}_1^n$, 当$n\to\infty$ 时,

$$\mathcal{E}_2^n := 8K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\to 0.$$

根据Poisson 随机测度积分的性质和(2.3.6), 我们有

$$\begin{aligned}I_3 \leq& 8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} T(t-\sigma)[F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} T(t-\sigma)[F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\\leq& 8K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\left\|F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\&+8K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\left\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\\leq& 8K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_3^n,\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{E}_3^n := 8K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\to 0, \tag{2.3.16}$$

当$n\to\infty$ 时. 事实上, 由(2.3.6) 我们可以推出

$$\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(0),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|\tilde{Y}(\sigma)-\tilde{Y}(0)\|^2<\infty,$$

并且由命题2.2.2 (3), 对于某常数$M(\tilde{Y}(0))$ 有

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(0),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\le M(\tilde{Y}(0)).$$

所以

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty.$$

因此我们有

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty.$$

综上所述, 根据Lebesgue 控制收敛定理我们可以得到(2.3.16) 成立.

对于最后一部分, 根据Poisson 随机测度积分的性质, (2.3.7) 和Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
I_4 \le& 8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\le& 16\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+16\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\
&+16\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+16\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}T(t-\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\
\le& 16K^2L\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+16K^2b\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\\
&\cdot\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+16K^2\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\ge1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+16K^2b\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
\leq&16K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{16K^2bL}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_4^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_4^n:=&16K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{16K^2b}{\omega}\cdot\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

类似于(2.3.16) 的讨论, 我们可以得到当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_4^n\to 0$.

通过对于I_1-I_4 的估计, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\leq&\mathcal{E}^n+32K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{8K^2L}{\omega}(1+2b)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}
$$

其中$\mathcal{E}^n=\sum_{i=1}^4\mathcal{E}_i^n$. 由引理1.4.1 和(2.3.9), 我们可以推得对任意的$t\in\mathbb{R}$, 当$n\to\infty$ 时,

$$
\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\to 0.
$$

由于$Y(t+s_n)$ 与$Y_n(t)$ 同分布, 由注2.2.2, 我们可以得到在分布意义下$Y(t+s_n)\to\tilde{Y}(t)$, 当$n\to\infty$ 时. 并且通过类似的方法我们还可以推得在分布意义下对任意$t\in\mathbb{R}$, 当$n\to\infty$ 时, $\tilde{Y}(t-s_n)\to Y(t)$. 证明完毕. □

注 2.3.1 *(i)* (2.3.6) 包含了对于F 和小的跳跃的限制, (2.3.7) 包含了对于G 和大的跳跃的限制.

(ii) (2.3.8) 和(2.3.9) 是对大的跳跃的定量描述, 当ω,K,L 已知时, 通过参数b 的上界, 来保证$\mathcal{L}^2$-有界解或者依分布概自守解的存在性. 当然, (2.3.8) 和(2.3.9) 对ω,K,L 也有限制: 至少它们应该分别满足

$$
\frac{1}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}<\frac{1}{4K^2L}\quad \text{和}\quad \frac{1}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{8K^2L}.
$$

注 2.3.2 在定理*2.3.1*中, 若用f,g是概自守的, F,G是依分布*Poisson*概自守的来代替均方条件, 我们不知道是否(2.3.1) 仍然有依分布概自守解. 但是若我们在$\mathcal{L}^2$-有界解中探索依分布概自守解, 那么对于系数是*(Poisson)* 均方概自守的假设是很自然的, 而且这个假设在应用中很容易满足*(e.g.,* 参见*§2.5*节的例子*)*. 事实上, 据我们所知: 在已有的文献中, 随机微分方程的所有概周期/概自守解都可以在$\mathcal{L}^2$-有界解中找到. 所以若能找到$\mathcal{L}^2$-无界解或者不属于空间$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 的依分布概周期/概自守解将是一件有趣的事情.

§2.4 概自守解的渐近稳定性

在上节中, 我们得到了半线性随机微分方程(2.3.1) 依分布概自守解的存在性. 在本节中, 我们会发现此解是全局渐近稳定的, 并且任何其他的解会以指数速度收敛到它. 首先, 让我们来回忆一下渐近稳定的定义.

定义 2.4.1 方程*(2.3.1)* 的解$Y(t)$称为在均方意义下稳定, 若对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得当$\mathbf{E}\|d - Y(0)\|^2 < \delta$ 时

$$\mathbf{E}\|Y_d(t) - Y(t)\|^2 < \epsilon, \quad t \geq 0,$$

其中$Y_d(t)$ 表示在初值条件$Y_d(0) = d$ 下方程*(2.3.1)* 的解. 解$Y(t)$ 称为在均方意义下渐近稳定, 若它在均方意义下稳定并且

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\|Y_d(t) - Y(t)\|^2 = 0. \tag{2.4.1}$$

若(2.4.1) 对任意的$d \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 成立, 则$Y(t)$ 称为在均方意义下全局渐近稳定.

下面的结论表明在比定理2.3.1 更弱的条件下, 方程(2.3.1) 解的存在区间可以扩展到正无穷.

引理 2.4.1 考虑方程(2.3.1). 假设A 生成一个耗散$\mathcal{C}^0$-半群使得(2.3.2) 成立, f, g 是均方概自守的, F, G 是*Poisson* 均方概自守的. 而且f, g, F, G 满足(2.3.4)-(2.3.7). 则对任意$Y_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$, 在初值$Y_0$ 条件下方程(2.3.1) 的解对$t \in [0,+\infty)$ 整体存在, 并且对任意$t \geq 0$,

$$\mathbf{E}\|Y(t)\|^2 \leq C_1 \mathrm{e}^{C_2 t},$$

其中$C_1 = C_1(K,\omega,b,f,g,F,G,\|Y_0\|_2,Q)$ 和$C_2 = C_2(K,\omega,L,b)$ 都是常数.

证明 首先根据(2.3.4), 对任意的$t \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)\|^2 \leq \mathbf{E}\|f(t,0)+f(t,Y)-f(t,0)\|^2 \leq 2\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|f(s,0)\|^2 + 2L\mathbf{E}\|Y\|^2.$$

同样的我们有

$$\mathbf{E}\|g(t,Y)Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} \leq 2\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|g(s,0)Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))} + 2L\mathbf{E}\|Y\|^2.$$

根据注2.2.1, 存在常数$C>0$ 使得

$$\max\left\{\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|f(s,0)\|^2, \sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|g(s,0)Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\right\} \leq C.$$

另一方面, 由(2.3.6) 我们可以得到

$$\begin{aligned}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) &= \int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,0,x)+F(t,Y,x)-F(t,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\\ &\leq 2\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) + 2L\mathbf{E}\|Y\|^2.\end{aligned}$$

类似的由(2.3.7)

$$\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) \leq 2\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x) + 2L\mathbf{E}\|Y\|^2.$$

根据命题2.2.2 (3), 存在常数$M_0>0$ 使得

$$\max\left\{\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x), \sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,0,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\right\} \leq M_0.$$

因此, 对$t\geq 0$, 根据Cauchy-Schwarz 不等式, Itô 等距和Poisson 随机测度积分的性质我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|Y(t)\|^2 =& \mathbf{E}\Bigg\|T(t)Y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_0^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\ &+ \int_0^t\int_{|x|_U<1}T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &+ \int_0^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Bigg\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 5K^2\mathrm{e}^{-2\omega t}\mathbf{E}\|Y_0\|^2+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s\right\|^2\\
&\quad+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
&\quad+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&\quad+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&\leq 5K^2\mathrm{e}^{-2\omega t}\mathbf{E}\|Y_0\|^2+5K^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\mathrm{d}s\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}2(C+L\mathbf{E}\|Y(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\quad+5K^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}2(C+L\mathbf{E}\|Y(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\quad+5K^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}2(M_0+L\mathbf{E}\|Y(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\quad+10K^2\int_0^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}2(M_0+L\mathbf{E}\|Y(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\quad+10K^2b\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\mathrm{d}s\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}2(M_0+L\mathbf{E}\|Y(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leq C_1+C_2\int_0^t \mathbf{E}\|Y(s)\|^2\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_1=&5K^2\mathbf{E}\|Y_0\|^2+\frac{10K^2C}{\omega^2}+\frac{5K^2C}{\omega}+\frac{15K^2M_0}{\omega}+\frac{20K^2bM_0}{\omega^2},\\
C_2=&\frac{10K^2L}{\omega}+40K^2L+\frac{20K^2bL}{\omega}.
\end{aligned}
$$

再根据Gronwall 不等式, 我们可以得到对任意的$t\geq 0$,

$$
\mathbf{E}\|Y(t)\|^2\leq C_1\mathrm{e}^{C_2t}.
$$

综上所述, 方程解的存在区间可以扩展到正无穷. 证明完毕. □

通过上面的引理, 我们现在来讨论方程(2.3.1) 解的渐近稳定性.

定理 2.4.1 *考虑方程(2.3.1). 假设定理2.3.1 的条件成立. 若将(2.3.8) 改为*

$$
\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{5K^2L},
$$

则方程(2.3.1) 的唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是在均方意义下全局渐近稳定的. 特别地, 当(2.3.9) 成立时, 此唯一$\mathcal{L}^2$-有界解及是依分布概自守的还是在均方意义下全局渐近稳定的.

证明 设$Y(t)$ 和$Z(t)$ 分别是是初值为$Y(0)$ 和$Z(0)$ 时方程(2.3.1) 的解. 那么, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\|Z(t)-Y(t)\|^2 =&\mathbf{E}\bigg\|T(t)[Z(0)-Y(0)]+\int_0^t T(t-s)[f(s,Z(s))-f(s,Y(s))]\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t T(t-s)[g(s,Z(s))-g(s,Y(s))]\mathrm{d}W(s)\\
&+\int_0^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)[F(s,Z(s-),x)-F(s,Y(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&+\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)[G(s,Z(s-),x)-G(s,Y(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
\leq&5K^2\mathrm{e}^{-2\omega t}\mathbf{E}\|Z(0)-Y(0)\|^2\\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)[f(s,Z(s))-f(s,Y(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)[g(s,Z(s))-g(s,Y(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U<1} T(t-s)[F(s,Z(s-),x)-F(s,Y(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1} T(t-s)[G(s,Z(s-),x)-G(s,Y(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2.
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

类似于 [45] 中稳定性定理的证明, 对于上式右端前两部分我们有, 对任意的$t\geq 0$,

$$
5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)[f(s,Z(s))-f(s,Y(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\leq\frac{5K^2L}{\omega}\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s,
\tag{2.4.3}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&5\mathbf{E}\left\|\int_0^t T(t-s)[g(s,Z(s))-g(s,Y(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
\leq&5K^2\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|(g(s,Z(s))-g(s,Y(s)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq 5K^2L\int_0^t e^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{2.4.4}$$

对于后面两部分我们有, 对任意$t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U<1}T(t-s)[F(s,Z(s-),x)-F(s,Y(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq&5\int_0^t K^2e^{-2\omega(t-s)}L\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s\\
\leq&5K^2L\int_0^t e^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

和

$$\begin{aligned}
&5\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)[G(s,Z(s-),x)-G(s,Y(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq&10\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)[G(s,Z(s-),x)-G(s,Y(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+10\mathbf{E}\left\|\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1}T(t-s)[G(s,Z(s-),x)-G(s,Y(s-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right\|^2\\
\leq&10K^2L\int_0^t e^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|Z(s)-Y(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
&+10K^2\int_0^t\int_{|x|_U\geq 1}e^{-\omega(t-s)}\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\omega(t-s)}L\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s\\
\leq&10K^2L\int_0^t e^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|Z(s)-Y(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
&+10K^2L\cdot\frac{b}{\omega}\cdot\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\cdot\mathbf{E}\|Z(s)-Y(s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

令$D(t) := \mathbf{E}\|Z(t)-Y(t)\|^2$, $k := 5K^2L\left(\frac{1+2b}{\omega}+4\right)$. 注意到对于$t \geq 0$, $e^{-2\omega t} \leq e^{-\omega t}$, 并且由(2.4.2)–(2.4.6) 我们可以得到

$$D(t) \leq 5K^2e^{-\omega t}D(0) + k\int_0^t e^{-\omega(t-s)}D(s)\mathrm{d}s. \tag{2.4.7}$$

注意到在不等式(2.4.7) 中$D(t)$由$\widetilde{D}(t)$ 控制, 并满足

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{D}}(t) &= -\omega\widetilde{D}(t)+k\widetilde{D}(t)\\
\widetilde{D}(0) &= 5K^2D(0).
\end{aligned}$$

因此若$-\omega+k<0$, 以指数速度$\widetilde{D}(t)\to 0$, 也就是说

$$\omega > 5K^2L\left(\frac{1+2b}{\omega}+4\right). \tag{2.4.8}$$

注意到(2.4.8) 成立当且仅当

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{5K^2L}.$$

因此, 当最后的不等式成立时, $D(t)$ 以指数速度收敛到0.

特别地, 若设$Y(t)$ 是唯一$\mathcal{L}^2$-有界解或者是方程(2.3.1) 的依分布概自守解, 我们可以得到其是在均方意义下全局渐近稳定的. 证明完毕. □

注 2.4.1 由稳定性定理的证明, 实际上我们可以得到方程(2.3.1) 在$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 中的任意解在均方意义下都是全局渐近稳定的.

§2.5 应用

在本节中, 我们给出三个例子来应用我们得到的结果.

例 2.5.1 我们考虑由双边*Lévy* 噪音驱动的常微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y=&\left(-6y+\frac{\cos\sqrt{2}t+\sin\sqrt{3}t}{6+\cos\sqrt{5}t}\cdot\frac{y}{y^2+1}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\sin(y+\cos\sqrt{3}t+\cos\sqrt{2}t)\mathrm{d}W \\ &+\int_{|x|<1}\frac{1}{4}y\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_{|x|\ge 1}\frac{1}{3}y\cdot\frac{\sin^2(\sqrt{3}t)}{3+\cos\sqrt{2}t+\cos\sqrt{5}t}N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\\ =:&\,(Ay+f(t,y))\mathrm{d}t+g(t,y)\mathrm{d}W+\int_{|x|<1}F(t,y,x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_{|x|\ge 1}G(t,y,x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

其中W 是一维*Brownian* 运动, N 是独立于W 的*Poisson* 随机测度. 显然A 生成了$\mathbb{R}$ 上的一个耗散半群其中$K=1$, $\omega=6$. 注意到f,g 是均方概自守的, F,G 是*Poisson* 概自守的. f,g,F,G 关于y 的*Lipschitz* 常数可以分别设为2/5, 1/3, 1/4, 1/3. 若取$L=(2/5)^2=4/25$, 则有

$$\int_{|x|<1}\frac{1}{16}\nu(\mathrm{d}x)\le\frac{4}{25} \quad 且 \quad \int_{|x|\ge 1}\frac{1}{9}\nu(\mathrm{d}x)\le\frac{4}{25},$$

即

$$\nu((-1,1)) < \frac{64}{25} \quad 且 \quad b \le \frac{36}{25}.$$

因此定理*2.3.1* 中的*Lipschitz* 条件(2.3.4)-(2.3.7) 是满足的.

由于系数同时满足*Lipschitz* 和全局线性增长条件, 通过经典的存在唯一性定理(例如见 *[2, 定理6.2.9]*) 或者引理*2.4.1*, 我们知道方程(4.4.1) 有一个全局时间解. 不等式(2.3.8) 和(2.3.9) 可变为

$$\frac{1+2b}{36} + \frac{2}{6} < \frac{25}{16} \quad 和 \quad \frac{1+2b}{36} + \frac{4}{6} < \frac{25}{32},$$

即对上述不等式分别有$b < 173/8$ 和$b < 25/16$. 由定理*2.3.1*, 若$\nu((-1,1)) < 64/25$, $b \le 36/25$, 则方程(4.4.1) 有唯一$\mathcal{L}^2$-有界温和解; 进一步的, 这个唯一$\mathcal{L}^2$-有界解在同样的条件下是依分布概自守的. 由定理*2.4.1*, 在同样的条件下, 我们可以得到这个依分布概自守解是在均方意义下全局渐近稳定的. 我们可以看到在$b \le 36/25$ 的条件下, 任意大的跳跃都是可能发生的.

例 2.5.2 考虑在区间*[0,1]* 上具有*Dirichlet* 边值条件的随机热方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) =& \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(t,\xi) + \frac{(\sin\sqrt{2}t + \cos\sqrt{3}t)u(t,\xi)}{6(u^2(t,\xi)+1)} + \frac{\sin\sqrt{2}t \cdot u(t,\xi)}{3(\cos\sqrt{3}t+2)}\frac{\partial W}{\partial t}(t,\xi) \qquad (2.5.2)\\
&+ \frac{\cos\sqrt{2}t \sin u(t,\xi)}{4(Z^2(t,\xi)+1)}\frac{\partial Z}{\partial t}(t,\xi), \quad t>0, \xi\in(0,1)\\
=:& \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(t,u) + g(t,u)\frac{\partial W}{\partial t} + h(t,u,Z)\frac{\partial Z}{\partial t},\\
u(t,0) =& u(t,1) = 0, \quad t>0.
\end{aligned}$$

这里W 是在$L^2(0,1)$ 上的*Q-Wiener* 过程满足$\mathrm{Tr}Q < \infty$, Z 是在$L^2(0,1)$ 上的与W 独立的*Lévy* 纯跳跃过程. 设A 是*Laplace* 算子, 则$A: D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$. 定义$\mathbb{H} = U := L^2(0,1)$. 则随机热方程在*Hilbert* 空间$\mathbb{H}$ 上可以写成一个抽象的发展方程

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y =& (AY + F(t,Y))\mathrm{d}t + G(t,Y)\mathrm{d}W + \int_{|z|_U<1} H(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) \qquad (2.5.3)\\
&+ \int_{|z|_U\ge 1} H(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),
\end{aligned}$$

这里

$$Y := u, \quad F(t,Y) := f(t,u), \quad G(t,Y) := g(t,u),$$
$$h(t,u,Z)\mathrm{d}Z := \int_{|z|_U<1} H(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) + \int_{|z|_U\ge 1} H(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),$$

其中

$$Z(t,\xi) = \int_{|z|_U<1} z\widetilde{N}(t,\mathrm{d}z) + \int_{|z|_U\ge 1} zN(t,\mathrm{d}z), \quad H(t,Y,z) = h(t,u,z)z.$$

为了简便起见,我们假定在$L^2(0,1)$ 上的*Lévy* 纯跳跃过程Z 是可以通过*Lévy-Itô* 分解定理分解的. 注意到算子A 有特征值$\{-n^2\pi^2\}_{n=1}^{\infty}$ 并且在$\mathbb{H}$ 上生成了一个$\mathcal{C}^0$-半群$T(t)$ 满足对$t\ge 0$, $\|T(t)\| \le \mathrm{e}^{-\pi^2 t}$, 即$K=1$ 且$\omega=\pi^2$. 这里f,g,h 关于y 的*Lipschitz* 常数可以分别设成$1/3, 1/3, 1/4$. 当$L=\max\{1/3^2, \|Q\|_{L(U,U)}/3^2, \nu(B_1(0))/4^2, b/4^2\}$ 时, $B_1(0)$ 是U 中以圆点为中心1为半径的球, 定理*2.3.1* 中的*Lipschitz* 条件(2.3.4)-(2.3.7) 是满足的. 最后, 注意到F,G 是均方概自守的并且H 是*Poisson* 均方概自守的. 再由引理*2.4.1*, 方程(4.4.3) 在$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上有一个全局时间解.

将不等式(2.3.8) 和(2.3.9) 分别变为

$$\frac{1+2b}{\pi^4} + \frac{2}{\pi^2} < \frac{1}{4L} \quad 和 \quad \frac{1+2b}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{8L}. \tag{2.5.4}$$

我们注意到若要(2.5.4) 中的不等式成立, $\|Q\|_{L(U,U)}$, $\nu(B_1(0))$, 和b 都不能太大; 具体可参见*2.3.1 (ii)*. 由定理*2.3.1*, (2.5.3) *(*也就是(4.4.3)*)* 有唯一$\mathcal{L}^2$-有界温和解, 若(2.5.4) 中的第一个不等式成立; 进一步, 这个唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是依分布概自守的, 若(2.5.4) 中的第二个不等式成立. 由定理*2.4.1*, 当$\frac{1+2b}{\pi^4}+\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{5L}$ 成立时, 唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是在均方意义下全局渐近稳定的. 当然, 当$\frac{1+2b}{\pi^4}+\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{8L}$ 成立时, 这个$\mathcal{L}^2$-有界解既是依分布概自守的还是在均方意义下全局渐近稳定的.

例 2.5.3 考虑在区间*[0,1]*上具有*Dirichlet* 边值条件的随机阻尼波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\xi) = -2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(t,\xi) + f(t,u(t,\xi)) + g(t,u(t,\xi))\frac{\partial W}{\partial t}(t,\xi)$$
$$+ h(t,u(t,\xi),Z(t,\xi))\frac{\partial Z}{\partial t}(t,\xi), \quad t>0, \xi\in(0,1),$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\quad t>0.$$

这里$\alpha>0$ 为常数, f,g,h 是具有下面给定性质的连续函数, W 是在$L^2(0,1)$ 上的Q-*Wiener* 过程满足$\mathrm{Tr}Q<\infty$, Z 是在$L^2(0,1)$ 上与W 独立的*Lévy* 纯跳跃过程. 设A 是*Laplace* 算子, 则$A: D(A)=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\to L^2(0,1)$. 定义$\mathbb{H}:=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)$. 令

$$Y:=\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}.$$

则随机阻尼波动方程可以改写成在*Hilbert* 空间$\mathbb{H}$ 上的抽象发展方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y=&(\mathcal{A}Y+\mathbb{F}(t,Y))\mathrm{d}t+\mathbb{G}(t,Y)\mathrm{d}W+\int_{|z|_{L^2}<1}\mathcal{H}(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\\&+\int_{|z|_{L^2}\geq 1}\mathcal{H}(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

这里

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix} 0 & I\\ A & -2\alpha I\end{pmatrix},\quad D(\mathcal{A}):=\begin{pmatrix} D(A)\\ D((-A)^{1/2})\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}(t,Y):=\begin{pmatrix} 0\\ f(t,u)\end{pmatrix},\quad \mathbb{G}(t,Y)\mathrm{d}W:=\begin{pmatrix} 0\\ g(t,u)\mathrm{d}W\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0\\ h(t,u,Z)\mathrm{d}Z\end{pmatrix}:=\int_{|z|_{L^2}<1}\mathcal{H}(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)+\int_{|z|_{L^2}\geq 1}\mathcal{H}(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),$$

其中

$$Z(t,\xi)=\int_{|z|_{L^2}<1}z\widetilde{N}(t,\mathrm{d}z)+\int_{|z|_{L^2}\geq 1}zN(t,\mathrm{d}z),$$

$$\mathcal{H}(t,Y,z)=\begin{pmatrix} 0\\ h(t,u,z)z\end{pmatrix}.$$

类似于上例, 我们假设$L^2(0,1)$ 上的*Lévy* 纯跳跃过程Z 是可以被分解的. 由 *[61, 引理4.7.3]*, 对于正常数K 和ω, 算子$\mathcal{A}$ 生成了一个$\mathcal{C}^0$-半群满足指数耗散性(2.3.2).

我们假设连续函数$f(t,u)$, $g(t,u)$ 和$h(t,u,Z)$ 关于u 是*Lipschitz* 的且*Lipschitz* 常数于t,Z 无关. 则由 *[3, 13.1 节]*, 函数$\mathbb{F}$ 和$\mathbb{G}$ 在相关的发展方程(2.5.5) 中关

于Y 是*Lipshictz* 的. 进一步假设f, g, h 在通常条件下是均方概自守的, 则$\mathbb{F}$和$\mathbb{G}$ 是均方概自守的. 最后令*Poisson*过程Z 的强度测量ν 使得$\mathcal{H}$ 是*Poisson*均方概自守的并且关于Y 在(2.3.6)-(2.3.7) 意义下是*Lipschitz* 的. 举一个简单的例子, 若$h(t, u, Z) \equiv h(t, u)$ 和$\int_{|z|_{L^2}\geq 1} |z|^2_{L^2}\nu(\mathrm{d}z)$ 是有限的, 则$\mathcal{H}$ 是*Poisson* 均方概自守的, 并且由 *[3, 13.1 节]*, $\mathcal{H}$ 满足*Lipschitz* 条件的要求. 因此由引理*2.4.1*, 方程(2.5.5) 有一个全局时间解. 注意到当f, g, h 的*Lipschitz* 常数小时, $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathcal{H}$的*Lipschitz* 常数也小. 因此, 由定理*2.3.1* 和*2.4.1*, 随机阻尼波动方程有一个依分布概自守解, 并且当f, g, h 的*Lipschitz* 常数适当小使得(2.3.9)成立时, 该解是在均方意义下全局渐近稳定的.

第三章　Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程的概自守解

在本章中, 我们主要研究了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程概自守解的存在性问题. 通过应用Banach 不等点定理, 指数二分性和随机分析的一些知识, 我们证明了方程有界解的存在唯一性. 而且, 在在适当的条件下, 我们可以得到此方程的唯一有界解是依分布概自守的.

本章第一节介绍了指数二分性和'Acquistapace-Terreni' 条件; 第二节讨论了另一种形式的Gronwall 引理; 第三节证明了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的半线性随机微分方程的有界解的存在唯一性, 而且在给定的条件下, 此方程的唯一有界解是依分布概自守的; 第四节给出两个例子来应用本章得到的结果.

§3.1　指数二分性和Acquistapace-Terreni 条件

设B 为Banach 空间.定义$L_b(B)$ 表示所有从B 到B 的有界线性算子构成的空间.

定义 3.1.1 *在$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上与$A(t)$相关的一族有界线性算子$\{U(t,s): t\geq s,\ t,s\in\mathbb{R}\}$ 称为算子的发展族, 若下面的条件成立:*

1. *对任意的$t\geq r\geq s$, 有$U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$;*
2. *对$t\in\mathbb{R}$, 有$U(t,t)=I$;*
3. *对任意的$t>s$, 有$(t,s)\to U(t,s)\in L_b(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 是强连续的;*
4. *$U(\cdot,s)\in C^1((s,\infty),L_b(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 且$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(t)U(t,s)$.*

定义 3.1.2 *一个发展族$\{U(t,s): t\geq s,\ t,s\in\mathbb{R}\}$ 称为具有指数二分性, 若有关于t 一致有界且强连续的投影$P(t)$, $t\in\mathbb{R}$, 常数$K\geq 1$ 和$\omega>0$ 使得*

1. *$P(t)U(t,s)=U(t,s)P(s)$;*

2. $U(t,s)$ 的限制$U_J(t,s): J(s)\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}) \to J(t)\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 是可逆的(我们可设$U(s,t) := (U_J(t,s))^{-1}$);

3. 对$t \geq s$, 有$\|U(t,s)P(s)\| \leq K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}$; 并对$t < s$, 有$\|U(t,s)J(s)\| \leq K\mathrm{e}^{\omega(t-s)}$,

其中$J(s) = I - P(s)$.

引理 3.1.1 [62] 若$A(t)$ 满足'*Acquistapace-Terreni*' 条件(*ATCs*), 也就是说, 存在常数$\lambda_0 > 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $L, K \geq 0$, 和$\alpha, \beta \in (0,1]$ 满足$\alpha + \beta > 1$ 使得对于$t, s \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Sigma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg \lambda| \leq \theta\}$ 有

$$\Sigma_\theta \cup \{0\} \subset \rho(A(t) - \lambda_0), \quad \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|}$$

且

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda, A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0, A(t)) - R(\lambda_0, A(s))]\| \leq L|t-s|^\alpha |\lambda|^\beta.$$

则在$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上存在唯一的一个发展族$\{U(t,s) : t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}\}$.

§3.2 另一种形式的Gronwall 引理

受 [50] 和 [63] 的启发, 我们得到了下面形式的Gronwall 引理.

引理 3.2.1 假设对任意的$t \in \mathbb{R}$, 有界函数$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足$\alpha' = \limsup_{s \to +\infty} \alpha(s) \leq \alpha(t)$, 常数$\beta_1, \ldots, \beta_{2n} \geq 0$, $\delta_1, \ldots, \delta_{2n} > 2\beta + \xi$ 其中$\beta := \sum_{i=1}^n \beta_i$, $\xi := \sum_{i=n+1}^{2n} \beta_i$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界连续函数使得对任意的$t \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} g(t) \leq &\alpha(t) + \beta_1 \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\delta_1(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s + \cdots + \beta_n \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\delta_n(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \beta_{n+1} \int_t^\infty \mathrm{e}^{\delta_{n+1}(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s + \cdots + \beta_{2n} \int_t^\infty \mathrm{e}^{\delta_{2n}(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

令$\delta := \min_{1 \leq i \leq 2n} \delta_i$. 则对任意的$\gamma \in (0, \delta - 2\beta - \xi]$, 有

$$g(t) \leq \frac{\delta}{\delta - \beta - \xi}\widetilde{\alpha}(t) + \left(\frac{\delta}{\delta - \beta - \xi}\right)^2 \beta \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}(\widetilde{\alpha}(s) - \alpha')\mathrm{d}s, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.2.2}$$

这里$\widetilde{\alpha}(t) := \sup_{s \geq t} \alpha(s)$ 对任意的$t \in \mathbb{R}$ 成立.

证明 设$\beta_i' = \beta_i/\beta, i = 1, \ldots, n$, $\xi_i' = \beta_i/\xi, i = n+1, \ldots, 2n$, $\alpha' = \limsup_{t\to+\infty} \alpha(t)$. 则$\alpha' \le \alpha(t)$ 对任意的$t \in \mathbb{R}$ 成立. 设$S = \{t \in \mathbb{R} : g(t) > \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi}\}$, 对$\forall t \in \mathbb{R}\backslash S$, 我们总有(3.2.2). 令

$$\nu(t) = \begin{cases} g(t) - \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi} & t \in S \\ 0 & t \in \mathbb{R}\backslash S \end{cases},$$

则$\nu(t)$ 是非负且有界的. 对$\forall t \in S$, 我们有$g(t) = \nu(t) + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi}$. 则对$\forall t \in S$,

$$\begin{aligned}
\nu(t) + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi} \le & \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}(\nu(s) + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi})\mathrm{d}s \\
& + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}(\nu(s) + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi})\mathrm{d}s \\
\le & \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s \\
& + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\mathrm{d}s\right) \\
\le & \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s \\
& + \frac{\delta\alpha'}{\delta-\beta-\xi} \cdot \frac{\beta+\xi}{\delta},
\end{aligned}$$

即

$$\nu(t) \le \alpha(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s.$$

对$\forall t \in \mathbb{R}\backslash S$, 由$\nu(t) = 0$, 我们有

$$\nu(t) \le \alpha(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s.$$

因此, 对$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\nu(t) \le \alpha(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)}\nu(s)\mathrm{d}s.$$

现在我们来证明$\lim_{t\to+\infty} \nu(t) = 0$. 反证法, 假设此结论不真, 则有$\gamma = \limsup_{t\to+\infty} \nu(t) > 0$ 且$\forall \theta \in (0, 1)$, 使得$\limsup_{t\to+\infty} \nu(t) = \gamma < \theta^{-1}\gamma$, 即存在$t_0 \ge 0$,

对任意$t \geq t_0$, 都有$\nu(t) < \theta^{-1}\gamma$. 则

$$\begin{aligned}\nu(t) \leq & \alpha(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)} \nu(s) \mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t-s)} \nu(s) \mathrm{d}s \\ \leq & \alpha(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)} \nu(s) \mathrm{d}s \\ & + \theta^{-1}\gamma \bigg(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{0}^{t-t_0} \mathrm{e}^{-\delta_i s} \mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_j s} \mathrm{d}s \bigg).\end{aligned}$$

设$t \to +\infty$, 则我们有

$$\gamma \leq \theta^{-1}\gamma (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_i s} \mathrm{d}s + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_j s} \mathrm{d}s \bigg) \leq \theta^{-1}\gamma \cdot \frac{\beta + \xi}{\delta}.$$

由θ 的任意性和$\frac{\beta+\xi}{\delta} < 1$, 我们不妨假设$\theta^{-1}\frac{\beta+\xi}{\delta} < 1$. 则$\gamma \leq \theta^{-1}\gamma \cdot \frac{\beta+\xi}{\delta} < \gamma$, 这与已知矛盾, 反证法结束.

若$f(t) = \sup_{s \geq t} \nu(s)$, 则$f(t) \geq \nu(t)$ 且$f(t)$ 是一个单调非增有界函数. 对任意的$t \in \mathbb{R}$, 存在$t_1 \geq t$ 使得

$$f(s) \begin{cases} = f(t) = \nu(t_1), & t \leq s \leq t_1 \\ < f(t_1), & t_1 < s \end{cases}.$$

则

$$\begin{aligned}f(t) = \nu(t_1) \leq & \alpha(t_1) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{t}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s \\ & + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{t_1}^{\infty} \mathrm{e}^{\delta_j(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s \\ = & \alpha(t_1) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{t}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s \\ & + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_j s} f(t_1 + s) \mathrm{d}s \\ \leq & \alpha(t_1) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s) \mathrm{d}s + f(t) \bigg[\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{t}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} \mathrm{d}s \\ & + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_j s} \mathrm{d}s \bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha(t_1) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s)\mathrm{d}s + f(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_i s}\mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{j=1+n}^{2n} \beta_j \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta_j s}\mathrm{d}s\Bigg] \\
&= \alpha(t_1) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t_1-s)} f(s)\mathrm{d}s + f(t)\sum_{i=1}^{2n} \frac{\beta_i}{\delta_i} \\
&\leq \widetilde{\alpha}(t) - \alpha' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)} f(s)\mathrm{d}s + \frac{\beta+\xi}{\delta} f(t).
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

类似于 [50, 引理3.3] 的证明, 我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}\beta_i'\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right) \leq \frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\mathrm{e}^{\gamma t}(\widetilde{\alpha}(t)-\alpha').
$$

则

$$
\mathrm{e}^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}\beta_i'\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}f(s)\mathrm{d}s \leq \frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\gamma s}(\widetilde{\alpha}(s)-\alpha')\mathrm{d}s. \tag{3.2.4}
$$

将(3.2.4) 代入(3.2.3) 中

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta-\beta-\xi}{\delta}f(t) &\leq \widetilde{\alpha}(t) - \alpha' + \beta\sum_{i=1}^{n}\beta_i'\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_i(t-s)}f(s)\mathrm{d}s \\
&\leq \widetilde{\alpha}(t) - \alpha' + \frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\cdot\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\gamma s}(\widetilde{\alpha}(s)-\alpha')\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由于

$$
g(t) - \frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\alpha' = \nu(t) \leq f(t),
$$

则对任意$t \in \mathbb{R}$,

$$
g(t) \leq \frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\widetilde{\alpha}(t) + \left(\frac{\delta}{\delta-\beta-\xi}\right)^2\cdot\beta\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}(\widetilde{\alpha}(s)-\alpha')\mathrm{d}s.
$$

□

§3.3 Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的随机微分方程的概自守解

在本节中, 我们考虑如下的半线性随机微分方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Y(t) &= A(t)Y(t)\mathrm{d}t + f(t, Y(t))\mathrm{d}t + g(t, Y(t))\mathrm{d}W(t) \\
&\quad + \int_{|x|_U<1} F(t, Y(t-), x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_{|x|_U\geq 1} G(t, Y(t-), x)N(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x), \qquad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{3.3.1}
$$

其中$f : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $g : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \to L(U, \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}))$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H}) \times U \to \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})$ 是连续函数; W 是Q-Wiener 过程, N 是Poisson 随机测度, $\widetilde{N}$ 是N 的t补偿Poisson 随机测度. W, N 和$\widetilde{N}$ 都可由双边Lévy 过程经过Lévy-Itô 分解得到.

在本节中, 我们还需要以下的基本假设.

(H1) 由$A(t)$生成的发展族$\{U(t, s) : t \geq s,\ t, s \in \mathbb{R}\}$ 具有指数二分性, 即存在投影$P(t)$, 常数$K \geq 1$ 和$\omega > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
\|U(t, s)P(s)\| &\leq Ke^{-\omega(t-s)}, \quad 对t \geq s, \\
\|U(t, s)J(s)\| &\leq Ke^{\omega(t-s)}, \quad 对t \leq s,
\end{aligned}
$$

其中$J(s) = I - P(s)$.

(H2) 假设$A(t)$ 满足'Acquistapace-Terreni' 条件, $U(t, s)$ 是指数二分的且$R(\lambda_0, A(\cdot)) \in AA(\mathbb{R}; L_b(\mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{H})))$. 则对任意实数列$\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在常数$\delta > 0$ 和子列$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得对任意$\epsilon > 0$, 存在$\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ 有

$$
\|U(t + s_n, s + s_n)P(s + s_n) - U(t, s)P(s)\| \leq \epsilon e^{-\delta(t-s)}
$$

对任意$n > \mathbf{N}$ 和$t \geq s$ 成立; 而且, 对任意$n \geq \mathbf{N}$ 和$t \leq s$, 有

$$
\|U(t + s_n, s + s_n)J(s + s_n) - U(t, s)J(s)\| \leq \epsilon e^{\delta(t-s)}.
$$

(H3) 假设f, g 是均方概自守的, F, G是Poisson 均方概自守的. 而且f, g, F 和G 关于Y 满足Lipschitz 条件且Lipschitz 常数与t 无关, 也就是说, 对任意的$Y,Z\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 和$t\in\mathbb{R}$, 存在与t 无关的常数$L>0$ 使得

$$\mathbf{E}\|f(t,Y)-f(t,Z)\|^2\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\mathbf{E}\|(g(t,Y)-g(t,Z))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2,$$

$$\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(t,Y,x)-F(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2, \tag{3.3.2}$$

$$\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t,Y,x)-G(t,Z,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\leq L\mathbf{E}\|Y-Z\|^2. \tag{3.3.3}$$

定义 3.3.1 $\mathcal{F}_t$-循序可测随机过程$\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为方程(3.3.1) 的温和解, 若对任意的$t\geq r$ 和$r\in\mathbb{R}$, 其满足相应的随机积分方程

$$\begin{aligned}Y(t) \;=\; & U(t,r)Y(r)+\int_r^t U(t,s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s+\int_r^t U(t,s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\\ &+\int_r^t\int_{|x|_U<1}U(t,s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &+\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

引理 3.3.1 假设*(H1)* 和*(H3)* 成立. 若(3.3.1) 有一个$\mathcal{L}^2$-有界温和解, 则此$\mathcal{L}^2$-有界解必然是$\mathcal{L}^2$-连续的.

证明 由条件(H1) 可知$\|U(t,s)P(s)\|\leq K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}$ 对任意的$t\geq s$ 成立, 且$\|U(t,s)J(s)\|\leq K\mathrm{e}^{\omega(t-s)}$ 对任意的$t\leq s$ 成立. 若$Y(t)$ 是方程(3.3.1) 的$\mathcal{L}^2$-有界解, 根据Cauchy-Schwarz 不等式, Itô 等距及Poisson 随机积分的性质, 我们可以推得对$t\geq r$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2\\ \leq& 5\mathbf{E}\|U(t,r)Y(r)-Y(r)\|^2+5\mathbf{E}\left\|\int_r^t U(t,s)P(s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s\right\|^2\\ &+5\mathbf{E}\left\|\int_r^t U(t,s)P(s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\ &+5\mathbf{E}\|\int_r^t\int_{|x|_U<1}U(t,r)P(s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+5\mathbf{E}\|\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}U(t,r)P(s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\|^2\\
\leq&5\mathbf{E}\|U(t,r)Y(r)-Y(r)\|^2+5K^2\mathrm{e}^{-2\omega(t-t)}\int_r^t 1\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\mathbf{E}\|f(s,Y(s))\|^2\mathrm{d}s\\
&+5K^2\mathrm{e}^{-2\omega(t-t)}\int_r^t\mathbf{E}\|g(s,Y(s))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\\
&+5K^2\mathrm{e}^{-2\omega(t-t)}\int_r^t\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&+5K^2\mathrm{e}^{-2\omega(t-t)}\Big[2\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&\qquad+2\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}1\ \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\Big]\\
=&5\mathbf{E}\|U(t,r)Y(r)-Y(r)\|^2+5K^2\int_r^t 1\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\mathbf{E}\|f(s,Y(s))\|^2\mathrm{d}s\\
&+5K^2\int_r^t\mathbf{E}\|g(s,Y(s))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\\
&+5K^2\int_r^t\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&+5K^2\Big[2\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
&\qquad+2\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}1\ \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\cdot\int_r^t\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

对于任意的$x\in\mathbb{H}$, 根据$U(\cdot,\cdot)$ 的定义, 我们有当$t\to r^+$ 时，$\|U(t,r)x-x\|\to 0$. 注意到$\|U(t,r)-I\|^2\ \mathbf{E}\|Y(r)\|^2<\infty$. 根据Lebesgue 控制收敛定理, 当$t\to r^+$ 时, $\mathbf{E}\|U(t,r)Y(r)-Y(r)\|^2\to 0$. 由已知(H3) 和$Y(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 类似于第二章定理2.3.1 第一部分的证明, 由注2.2.1 和命题2.2.2 (3), 我们有

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|f(s,Y(s))\|^2<\infty; \tag{3.3.4}$$

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|g(s,Y(s))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}<\infty; \tag{3.3.5}$$

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty; \tag{3.3.6}$$

和

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(s,Y(s-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty. \tag{3.3.7}$$

因此当$t \to r^+$ 时, $\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2 \to 0$. 通过类似的方法, 我们还可以得到当$t \to r^-$ 时, $\mathbf{E}\|Y(t)-Y(r)\|^2 \to 0$. 综上所述, $Y(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-连续的. □

注意到若$Y(t)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则$Y(t)$ 是方程(3.3.1) 的温和解当且仅当其满足下列方程

$$\begin{aligned} Y(t) \;=\; & \int_{-\infty}^{t} U(t,s)P(s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)P(s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s) \\ & + \int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} U(t,s)P(s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ & + \int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)P(s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ & - \int_{t}^{\infty} U(t,s)J(s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s - \int_{t}^{\infty} U(t,s)J(s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s) \\ & - \int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1} U(t,s)J(s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ & - \int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)J(s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

由此, 我们可以得到下面的定理.

定理 3.3.1 假设*(H1)* 和*(H3)* 成立. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2} + \frac{2}{\omega} < \frac{1}{16K^2L}, \tag{3.3.9}$$

则(3.3.1) 有唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解.

证明 设$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 表示所有从$\mathbb{R}$ 到$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 的有界$\mathcal{L}^2$-连续映射构成的Banach 空间, 其上范数为$\|\cdot\|_\infty$. 定义作用于$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的算子$\mathcal{S}$ 为

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}Y)(t) \;:=\; & \int_{-\infty}^{t} U(t,s)P(s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)P(s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s) \\ & + \int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1} U(t,s)P(s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ & + \int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)P(s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ & - \int_{t}^{\infty} U(t,s)J(s)f(s,Y(s))\mathrm{d}s - \int_{t}^{\infty} U(t,s)J(s)g(s,Y(s))\mathrm{d}W(s) \\ & - \int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1} U(t,s)J(s)F(s,Y(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

$$-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)G(s,Y(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

我们注意到若$Y(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界过程, 由引理3.3.1 的证明, $(\mathcal{S}Y)(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-连续过程. 因此, 我们可以推得算子$\mathcal{S}$ 从$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 映到本身. 下面我们的目标是证明算子$\mathcal{S}$ 是$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的压缩映射.

对$Y_1,Y_2\in C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 和$t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|^2\\
=\;&\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\\
&+\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1} U(t,s)P(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)P(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^{\infty} U(t,s)J(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\\
&-\int_t^{\infty} U(t,s)J(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1} U(t,s)J(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)J(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
\leq\;&8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1} U(t,s)P(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1} U(t,s)P(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_t^{\infty} U(t,s)J(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_t^{\infty} U(t,s)J(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+8\mathbf{E}\left\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}U(t,s)J(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

通过类似于第二章定理2.3.1 的证明, 我们可将上面不等式右侧的第一和第五部分变为

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)P(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\\
\leq\ &\mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{t}e^{-\omega(t-s)}\|f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))\|\mathrm{d}s\right)^2\\
\leq\ &\frac{K^2L}{\omega^2}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|^2
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}U(t,s)J(s)[f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))]\mathrm{d}s\right\|^2\\
\leq\ &\mathbf{E}\left(\int_{t}^{\infty}e^{\omega(t-s)}\|f(s,Y_1(s))-f(s,Y_2(s))\|\mathrm{d}s\right)^2\\
\leq\ &\frac{K^2L}{\omega^2}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\|Y_1(s)-Y_2(s)\|^2.
\end{aligned}
$$

通过类似于 [52, 定理4.2] 的证明, 不等式的余下部分有如下形式

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)P(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
\leq\ &K^2\left(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|(g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\right)\\
\leq\ &\frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}U(t,s)J(s)[g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\\
\leq\ &K^2\left(\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{2\omega(t-s)}\mathbf{E}\|(g(s,Y_1(s))-g(s,Y_2(s)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}s\right)\\
\leq\ &\frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}U(t,s)P(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq\ & K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
\leq\ & \frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)P(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq\ & 2\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)P(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+2\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)P(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right\|^2\\
\leq\ & (\frac{K^2L}{\omega}+\frac{2K^2Lb}{\omega^2})\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1}U(t,s)J(s)[F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq\ & K^2\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\omega(t-s)}\mathbf{E}\left\|F(s,Y_1(s-),x)-F(s,Y_2(s-),x)\right\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\
\leq\ & \frac{K^2L}{2\omega}\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
\leq\ & 2\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|^2\\
&+2\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)[G(s,Y_1(s-),x)-G(s,Y_2(s-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right\|^2\\
\leq\ & (\frac{K^2L}{\omega}+\frac{2K^2Lb}{\omega^2})\cdot\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

通过上面的估计, 对任意的$t\in\mathbb{R}$, 我们得到

$$
\mathbf{E}\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|^2\leq\left[\frac{16K^2L}{\omega^2}(1+2b)+\frac{32K^2L}{\omega}\right]\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbf{E}\left\|Y_1(s)-Y_2(s)\right\|^2,
$$

即

$$\|(\mathcal{S}Y_1)(t)-(\mathcal{S}Y_2)(t)\|_2^2 \le \eta \cdot \sup_{s\in\mathbb{R}} \|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2^2, \tag{3.3.10}$$

其中$\eta := \frac{16K^2L}{\omega^2}(1+2b)+\frac{32K^2L}{\omega}$. 注意到

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2^2 \le (\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Y_1(s)-Y_2(s)\|_2)^2. \tag{3.3.11}$$

将(3.3.11) 代入(3.3.10) 我们有

$$\|\mathcal{S}(Y_1)(t)-\mathcal{S}(Y_2)(t)\|_2 \le \sqrt{\eta}\, \|Y_1-Y_2\|_\infty.$$

因此,

$$\|\mathcal{S}Y_1-\mathcal{S}Y_2\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{S}(Y_1)(t)-\mathcal{S}(Y_2)(t)\|_2 \le \sqrt{\eta}\, \|Y_1-Y_2\|_\infty.$$

由$\eta<1$, 我们可以得到$\mathcal{S}$ 是一个$C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 上的压缩映射. 根据Banach 不动点定理, 方程(3.3.1) 存在唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解$u\in C_b(\mathbb{R};\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))$ 使得$\mathcal{S}u=u$. □

定理 3.3.2 假设*(H1), (H2)* 和*(H3)* 成立. 若

$$\frac{1+2b}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}<\frac{1}{72K^2L}, \tag{3.3.12}$$

则方程(3.3.1) 的唯一$\mathcal{L}^2$-有界温和解是依分布概自守的.

证明 由已知条件(H3), 则对函数$\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, 和任意实数列$\{s_n'\}$ 存在$\{s_n'\}$ 的子列$\{s_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|f(t+s_n,Y)-\widetilde{f}(t,Y)\|^2=0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|\widetilde{f}(t-s_n,Y)-f(t,Y)\|^2=0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|(g(t+s_n,Y)-\widetilde{g}(t,Y))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|(\widetilde{g}(t-s_n,Y)-g(t,Y))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|_U<1} \mathbf{E}\|F(t+s_n,Y,x)-\widetilde{F}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|_U<1} \mathbf{E}\|\widetilde{F}(t-s_n,Y,x)-F(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0;$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|G(t+s_n,Y,x)-\widetilde{G}(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|_U\geq 1}\mathbf{E}\|\widetilde{G}(t-s_n,Y,x)-G(t,Y,x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)=0$$

对任意的$t\in\mathbb{R}$ 和$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 成立. 则$\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{F},\widetilde{G}$ 满足Lipschitz 条件且其Lipschitz 常数L 与f,g,F,G 的相同. 类似于引理3.3.1 的证明, $\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{F},\widetilde{G}$ 关于Y 是Lipschitz 连续.

我们假设$\tilde{Y}(\cdot)$ 满足方程

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(t):=&\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)\widetilde{f}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^t U(t,s)P(s)\widetilde{g}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}W(s)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}U(t,s)P(s)\widetilde{F}(s,\tilde{Y}(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)P(s)\widetilde{G}(s,\tilde{Y}(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^\infty U(t,s)J(s)\widetilde{f}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}s-\int_t^\infty U(t,s)J(s)\widetilde{g}(s,\tilde{Y}(s))\mathrm{d}W(s)\\
&-\int_t^\infty\int_{|x|_U<1}U(t,s)J(s)\widetilde{F}(s,\tilde{Y}(s-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^\infty\int_{|x|_U\geq 1}U(t,s)J(s)\widetilde{G}(s,\tilde{Y}(s-),x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

则根据定理3.3.1, 上面的方程有唯一$\mathcal{L}^2$-有界解.

令$\sigma=s-s_n$. 则对任意的$\sigma\in\mathbb{R}$, 我们可以定义$W_n(\sigma):=W(\sigma+s_n)-W(s_n)$, $N_n(\sigma,x):=N(\sigma+s_n,x)-N(s_n,x)$ 和$\widetilde{N}_n(\sigma,x):=\widetilde{N}(\sigma+s_n,x)-\widetilde{N}(s_n,x)$. 注意到$W_n$ 与W 同分布, N_n于N 同分布, $\widetilde{N}_n$ 是N_n 的补偿Poisson 随机测度.

$$\begin{aligned}
Y(t+s_n)=&\int_{-\infty}^t U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}\sigma\\
&+\int_{-\infty}^t U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}W_n(\sigma)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)\widetilde{N}_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)N_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_t^{\infty} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}\sigma\\
&-\int_t^{\infty} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n))\mathrm{d}W_n(\sigma)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)\widetilde{N}_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y(\sigma+s_n-),x)N_n(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

假设$Y_n(\cdot)$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
Y_n(t)=&\int_{-\infty}^t U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&+\int_{-\infty}^t U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1} U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\
&+\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U\geq 1} U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^{\infty} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&-\int_t^{\infty} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\\
&-\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

则我们不难得到对任意的$t\in\mathbb{R}$, $Y(t+s_n)$ 与$Y_n(t)$ 同分布. 注意到$Y_n(\cdot)$ 唯一且$\mathcal{L}^2$-有界.

则我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\\
\leq&8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-U(t,\sigma)P(\sigma)\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-U(t,\sigma)P(\sigma)\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
&+8\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- U(t,\sigma)P(\sigma)\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2 \\
&+ 8\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x) \\
&- U(t,\sigma)P(\sigma)\widetilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2 \\
&+ 8\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma)) - U(t,\sigma)J(\sigma)\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 8\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma)) - U(t,\sigma)J(\sigma)\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2 \\
&+ 8\mathbf{E}\Big\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U< 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x) \\
&- U(t,\sigma)J(\sigma)\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2 \\
&+ 8\mathbf{E}\Big\|\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x) \\
&- U(t,\sigma)J(\sigma)\widetilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2 \\
=:& I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

根据Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_1 \leq& 24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)[f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma)) - f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n) - U(t,\sigma)P(\sigma)]f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t} U(t,\sigma)P(\sigma)[f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma)) - \widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty} U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)[f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma)) - f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n) - U(t,\sigma)J(\sigma)]f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
&+ 24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty} U(t,\sigma)J(\sigma)[f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma)) - \widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}\sigma\right\|^2 \\
\leq& 24K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma)) - f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+24\epsilon^2\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\frac{-\delta(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\frac{-\delta(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\frac{-\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\delta(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\delta(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\mathrm{d}\sigma\cdot\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{\omega(t-\sigma)}{2}\cdot 2}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
\le&\frac{24K^2L}{\omega}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{24K^2L}{\omega}\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_1^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^n:=&\frac{24K^2}{\omega}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{24\epsilon^2}{\delta}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{24K^2}{\omega}\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+\frac{24\epsilon^2}{\delta}\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\delta(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(0))\|_2\le\sqrt{L}\|\tilde{Y}(\sigma)-\tilde{Y}(0)\|_2,
$$

由注2.2.1, 我们有

$$
\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\|f(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|_2<\infty \quad 和 \quad \sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\|\widetilde{f}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))\|_2<\infty.
$$

由已知f 是均方概自守的, $\tilde{Y}(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的. 再由ϵ 的任意性和Lebesgue 控制收敛定理, 我们可以推出当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_1^n\to 0$.

应用Ito 等距, 我们可以推得

$$
I_2\le 24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^t U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)[g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&+24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)]g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
&+24\mathbf{E}\left\|\int_{-\infty}^{t}U(t,\sigma)P(\sigma)[g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
&+24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)[g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
&+24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)J(\sigma)]g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
&+24\mathbf{E}\left\|\int_{t}^{\infty}U(t,\sigma)J(\sigma)[g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma))]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|^2\\
\le&24\mathbf{E}\int_{-\infty}^{t}\|U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)\|^2\\
&\cdot\|(g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\mathbf{E}\int_{-\infty}^{t}\|U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)\|^2\\
&\cdot\|g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\mathbf{E}\int_{-\infty}^{t}\|U(t,\sigma)P(\sigma)\|^2\cdot\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\mathbf{E}\int_{t}^{\infty}\|U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)\|^2\\
&\cdot\|(g(\sigma+s_n,Y_n(\sigma))-g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\mathbf{E}\int_{t}^{\infty}\|U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)J(\sigma)\|^2\cdot\|g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\mathbf{E}\int_{t}^{\infty}\|U(t,\sigma)J(\sigma)\|^2\cdot\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
\le&24K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2L\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_2^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_2^n:=&24K^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\delta(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|(g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))-\widetilde{g}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma)))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

$$+24\epsilon^2\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{2\delta(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|g(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma))Q^{1/2}\|^2_{L(U,\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H}))}\mathrm{d}\sigma.$$

通过类似于$\mathcal{E}_1^n$ 的方法, 我们可以得到当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_2^n\to 0$.

根据补偿Poisson 随机积分的性质和(3.3.2), 我们有

$$\begin{aligned}
I_3\leq&24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)\\
&\cdot[F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)]\\
&\cdot F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}U(t,\sigma)P(\sigma)[F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)\\
&\cdot[F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)J(\sigma)]\\
&\cdot F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}U(t,\sigma)J(\sigma)[F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
\leq&24K^2\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_{-\infty}^t\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_t^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\Big\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\Big\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 24K^2L\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+24K^2L\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma+\mathcal{E}_3^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_3^n:=&24K^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{-2\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24K^2\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\\
&+24\epsilon^2\int_{t}^{\infty}\int_{|x|_U<1}\mathrm{e}^{2\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

类似于第二章定理2.3.1 中的证明, 由命题2.2.2, 我们有

$$
\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|F(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty
$$

和

$$
\sup_{\sigma\in\mathbb{R}}\int_{|x|_U<1}\mathbf{E}\|\widetilde{F}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)<\infty.
$$

由已知F 是Poisson 均方概自守的, $\tilde{Y}(\cdot)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的. 根据ϵ 的任意性和Lebesgue 控制收敛定理, 我们可以推得当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_3^n\to 0$.

根据Poisson 随机积分的性质, (3.3.3) 和Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_4\leq&24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)\\
&\cdot[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)]\\
&\cdot G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2\\
&+24\mathbf{E}\Big\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,\sigma)P(\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\Big\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+24\mathbf{E}\bigg\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)\\
&\quad\cdot[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+24\mathbf{E}\bigg\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)J(\sigma)]\\
&\quad\cdot G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+24\mathbf{E}\bigg\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,\sigma)J(\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]N(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
\leq&48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)\\
&\quad\cdot[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)\\
&\quad\cdot[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)]\\
&\quad\cdot G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}[U(t+s_n,\sigma+s_n)P(\sigma+s_n)-U(t,\sigma)P(\sigma)]\\
&\quad\cdot G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,\sigma)P(\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|_U\geq 1}U(t,\sigma)P(\sigma)[G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)\\
&\quad\cdot[G(\sigma+s_n,Y_n(\sigma-),x)-G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma,\mathrm{d}x)\bigg\|^2\\
&+48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}U(t+s_n,\sigma+s_n)J(\sigma+s_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \cdot [G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x) - G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2 \\
&+ 48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^\infty \int_{|x|_U\geq 1} [U(t+s_n, \sigma+s_n)J(\sigma+s_n) - U(t,\sigma)J(\sigma)] \\
&\quad \cdot G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma, \mathrm{d}x)\bigg\|^2 \\
&+ 48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^\infty \int_{|x|_U\geq 1} [U(t+s_n, \sigma+s_n)J(\sigma+s_n) - U(t,\sigma)J(\sigma)] \\
&\quad \cdot G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2 \\
&+ 48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^\infty \int_{|x|_U\geq 1} U(t,\sigma)J(\sigma)[G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)]\widetilde{N}(\mathrm{d}\sigma, \mathrm{d}x)\bigg\|^2 \\
&+ 48\mathbf{E}\bigg\|\int_t^\infty \int_{|x|_U\geq 1} U(t,\sigma)J(\sigma)[G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)]\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma\bigg\|^2 \\
\leq & 48K^2L\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2b\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^t \int_{|x|_U\geq 1} \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x) - G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-2\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2 b\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^t \int_{|x|_U\geq 1} \mathrm{e}^{-\delta(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2\int_{-\infty}^t \int_{|x|_U\geq 1} \mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2b\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^t \int_{|x|_U\geq 1} \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2L\int_t^\infty \mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2b\int_t^\infty \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x) - G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2 \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{2\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2 b \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\delta(t-\sigma)} \mathrm{d}\sigma \\
&\cdot \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2 \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2 b \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)} \mathrm{d}\sigma \\
&\cdot \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
\leq & 48K^2 L \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)} \cdot \mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ \frac{48K^2 bL}{\omega} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)} \cdot \mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2 L \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)} \cdot \mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ \frac{48K^2 bL}{\omega} \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)} \cdot \mathbf{E}\|Y_n(\sigma) - \tilde{Y}(\sigma)\|^2 \mathrm{d}\sigma + \mathcal{E}_4^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_4^n := & 48K^2 \int_{-\infty}^{t} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-2\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ \frac{48\epsilon^2 b}{\delta} \cdot \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ \frac{48K^2 b}{\omega} \cdot \int_{-\infty}^{t} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48K^2 \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x) - \tilde{G}(\sigma, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma \\
&+ 48\epsilon^2 \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{2\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, \tilde{Y}(\sigma-), x)\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&+ \frac{48\epsilon^2 b}{\delta} \cdot \int_t^{\infty} \int_{|x|_U \geq 1} \mathrm{e}^{\delta(t-\sigma)} \mathbf{E}\|G(\sigma+s_n, Y_n(\sigma-), x)\|^2 \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

$$+\frac{48K^2b}{\omega}\cdot\int_t^{\infty}\int_{|x|_U\geq 1}\mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)}\mathbf{E}\|G(\sigma+s_n,\tilde{Y}(\sigma-),x)-\tilde{G}(\sigma,\tilde{Y}(\sigma-),x)\|^2\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma.$$

类似于(3.3.13), 我们得到当$n\to\infty$ 时, $\mathcal{E}_4^n\to 0$.

通过以上的估计, 我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\leq&\mathcal{E}^n+96K^2L\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\&+\frac{24K^2L}{\omega}(1+2b)\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\&+96K^2L\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{2\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma\\&+\frac{24K^2L}{\omega}(1+2b)\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{\omega(t-\sigma)}\cdot\mathbf{E}\|Y_n(\sigma)-\tilde{Y}(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

其中$\mathcal{E}^n=\sum_{i=1}^4\mathcal{E}_i^n$. 由引理3.2.1 和(3.3.12), 我们推得对任意$t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\|Y_n(t)-\tilde{Y}(t)\|^2\to 0,\qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}.$$

注意到$Y(t+s_n)$ 与$Y_n(t)$ 同分布. 由定义2.2.2, 我们不难得到在分布意义下$Y(t+s_n)\to\tilde{Y}(t)$, 当$n\to\infty$ 时. 通过类似的讨论, 我们还可以得到在分布意义下对任意的$t\in\mathbb{R}$, 当$n\to\infty$ 时, $\tilde{Y}(t-s_n)\to Y(t)$. 证明完毕. □

§3.4 应用

在本节中, 我们给出两个例子来应用我们得到的结论.

例 3.4.1 *考虑下列由双边Lévy 噪音驱动的常微分方程:*

$$\mathrm{d}y=(Ay+f(t,y))\mathrm{d}t+g(t,y)\mathrm{d}W+\int_{|x|<1}F(t,y,x)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_{|x|\geq 1}G(t,y,x)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x).$$

这里

$$A:=\begin{pmatrix}8&0\\0&-6\end{pmatrix},$$

$$f(t,y):=\begin{pmatrix}0\\\frac{\cos\sqrt{2}t+\sin\sqrt{3}t}{17+\cos\sqrt{5}t}\cdot\frac{y}{y^2+1}\end{pmatrix},\quad g(t,y):=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{12}\sin(y+\cos\sqrt{3}t+\cos\sqrt{2}t)\end{pmatrix},$$

$$F(t,y,x):=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{10}y\end{pmatrix},\quad G(t,y,x):=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{9}y\cdot\frac{\sin^2(\sqrt{3}t)}{3+\cos\sqrt{2}t+\cos\sqrt{5}t}\end{pmatrix},$$

其中W 是一维*Brownian* 运动, N 是独立于W 的*Poisson* 随机测度, $\widetilde{N}$ 是N 的补偿*Poisson* 随机测度. 显然条件*(H1)* 和*(H2)* 成立, 也就是说, A 生成的发展族满足指数二分性且$K=1$, $\omega=6$; f,g 是均方概自守的, F,G 是*Poisson* 均方概自守的. 令关于y 的f,g,F,G 的*Lipschitz* 常数分别取$1/8,1/12$, $1/10,1/9$. 由条件*H(3)* 中*Lipschitz* 条件, 我们可以得到常数$L=(1/8)^2=1/64$. 因此, 我们有

$$\int_{|x|<1}\frac{1}{100}\nu(\mathrm{d}x)\le\frac{1}{64}\quad 和 \quad\int_{|x|\ge 1}\frac{1}{81}\nu(\mathrm{d}x)\le\frac{1}{64},$$

即

$$\nu((-1,1))<\frac{25}{16}\quad 和 \quad b\le\frac{81}{64}.$$

则根据不等式(3.3.9) 和(3.3.12), 我们分别有

$$\frac{1+2b}{36}+\frac{2}{6}<4\quad 和 \quad\frac{1+2b}{36}+\frac{4}{6}<\frac{8}{9},$$

即$b<131/2$ 和$b<7/2$. 根据定理*3.3.1*, 若$\nu((-1,1))<25/16$, $b\le 81/64$, 则方程(3.4.1) 有唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解; 进一步, 由定理*3.3.2*, 在同样的条件下此唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是依分布概自守的.

例 3.4.2 假设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界集合, 其边界$\partial\Omega$ 是C^2 类的且局部在Ω 的一侧.

考虑抛物型随机偏微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u(t,\xi)=&\{A(t,\xi)u(t,\xi)+f(t,u(t,\xi))\}\mathrm{d}t+g(t,u(t,\xi))\mathrm{d}W(t,\xi)\\&+h(t,u(t,\xi),Z(t,\xi))\mathrm{d}Z(t,\xi)\\&\sum_{i,j=1}^{n}n_i(\xi)a_{ij}(t,\xi)D_iu(t,\xi)=0,\qquad t\in\mathbb{R},\qquad \xi\in\partial\Omega,\end{aligned}$$

这里$D_i:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_i}$, f,g,h 是具有下面给定性质的连续函数, W 是$\mathcal{L}^2(\Omega)$ 上的Q-*Wiener* 过程满足$\mathrm{Tr}Q<\infty$, Z 是$\mathcal{L}^2(\Omega)$ 上独立于W 的*Lévy* 纯跳跃过程, $n(\xi)=(n_1(\xi),n_2(\xi),\ldots,n_n(\xi))$ 是外单位法向量, 给出形式上的算子族$A(t,\xi)$ 为

$$A(t,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(a_{ij}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial u_j}\right)+a_0(t,\xi),\qquad t\in\mathbb{R},\qquad \xi\in\Omega,$$

且a_0, $a_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ 满足下列条件:

(i) 系数$(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ 是对称的, 即对任意的$i,j=1,\dots,n$, $a_{ij}=a_{ji}$. 而且对任意的$i,j=1,\dots,n$, $a_{ij}\in C_b^{\mu}(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},C(\overline{\Omega})))\bigcap C_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},C^1(\overline{\Omega})))\bigcap AA(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathcal{L}^2(\Omega)))$, 对$\mu\in(1/2,1]$, $a_0\in C_b^{\mu}(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathcal{L}^2(\Omega)))\bigcap C_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},C(\overline{\Omega})))\bigcap AA(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathcal{L}^1(\Omega)))$.

(ii) 对任意的$(t,\xi)\in\mathbb{R}\times\overline{\Omega}$ 和$\eta\in\mathbb{R}^n$, 存在$\epsilon_0>0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,\xi)\eta_i\eta_j\geq\epsilon_0|\eta|^2.$$

定义$\mathbb{H}=\mathcal{L}^2(\Omega)$. 对任意$t\in\mathbb{R}$, 定义$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$ 上的算子$A(t)$ 为

$$\mathcal{D}(A(t))=\{u\in W^{2,2}(\Omega):\sum_{i,j=1}^{n}n_i(\cdot)a_{ij}(t,\cdot)D_iu=0\quad\text{在}\quad\partial\Omega\}$$

且对任意的$Y\in\mathcal{D}(A(t))$, $A(t)Y=A(t,\xi)u(\xi)$.

在上述假设条件下, 我们可以找到满足条件*(H1)*-*(H2)* 的发展族$U(t,s)$; 具体可参见 *[64]*.

我们可以把抛物型随机偏微分方程改写成在*Hilbert* 空间$\mathbb{H}$ 上的抽象发展方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y=(A(t)Y+F(t,Y))\mathrm{d}t+G(t,Y)\mathrm{d}W+\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}<1}\mathcal{H}(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\\+\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}\geq1}\mathcal{H}(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

这里

$$\begin{aligned}F(t,Y):=&f(t,u),\quad G(t,Y)\mathrm{d}W:=g(t,u)\mathrm{d}W,\\h(t,u,Z)\mathrm{d}Z:=&\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}<1}\mathcal{H}(t,Y,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)+\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}\geq1}\mathcal{H}(t,Y,z)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z),\end{aligned}$$

其中

$$Z(t,\xi)=\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}<1}z\widetilde{N}(t,\mathrm{d}z)+\int_{|z|_{\mathcal{L}^2}\geq1}zN(t,\mathrm{d}z)\ \text{和}\ \mathcal{H}(t,Y,z)=h(t,u,z)z.$$

为简单起见, 我们假设Z 可由*Lévy-Itô* 分解定理分解成上面的形式.

假设连续函数$f(t,u)$ 和$g(t,u)$ 是均方概自守, 关于u 是*Lipschitz* 的且*Lipschitz* 常数与t 无关. 则(3.4.1) 中的函数$\mathbb{F}$ 和$\mathbb{G}$ 是均方概自守, 关于Y 是*Lipshictz* 的. 假设连续函数$h(t,u,Z)$ 关于u 是*Lipschitz* 的, 其*Lipschitz* 常数于t,Z 无关, *Poisson* 过程Z 的强度测度ν 使得$\mathcal{H}$ 关于Y 是*Lipschitz* 的且在(3.3.2) 和(3.3.3) 中是*Poisson* 均方概自守的. 特别地, 当ν 是有限测度时, 对于$\mathcal{H}$ 上*Lipschitz* 条件的要求是满足的. 也就是说, 条件*(H3)* 成立.

综上所述, *(H1)-(H3)* 均满足, 所以当K 和f,g,h 的*Lipschitz* 常数适当小的时, 抛物型随机偏微分方程有唯一的$\mathcal{L}^2$-有界温和解$u \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{H})$; 进一步, 若$f,g,h$ 的*Lipschitz* 常数足够小, 这个唯一$\mathcal{L}^2$-有界解是依分布概自守的.

第四章 缺少Favard 分离条件的随机微分方程的概周期和概自守解

本章研究的是带有概周期和概自守系数的线性随机微分方程的概周期和概自守解的存在性. 我们证明了若带有概周期(概自守)系数的线性随机微分方程存在一个有界解且其相关齐次方程的所有有界解都是同宿趋于零的, 则方程至少有一个依分布概周期(概自守)的解.

本章第一节介绍了动力系统的概周期和概自守运动; 第二节介绍了依分布回复性相容和一致相容运动, 研究了其在动力系统中的一些性质; 第三节证明了由Gauss 噪音驱动的缺少Favard 分离条件的线性随机微分方程的依分布概周期和依分布概自守的存在性; 第四节给出两个例子来应用本章得到的结果.

§4.1 动力系统的概周期和概自守运动

假设X 和V 为完备的度量空间.

定义 4.1.1 在X 上的动力系统定义为对任意的$x \in X$, 连续函数$\pi :\to \mathbb{R} \times X \to X$ 使得$\pi(0,x) = x$, 且对任意的$x \in X$ 和$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\pi(t_1 + t_2, x) = \pi(t_2, \pi(t_1, x))$.

记$\pi_t(x) := \pi(t,x)$, 则$(X, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为X 上的动力系统.

定义 4.1.2 假设$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为动力系统. 点$\alpha \in V$ 称为正向(负向) Poisson 稳定, 若存在子列$t_n \to +\infty$ $(t_n \to -\infty)$ 使得$\lambda(t_n, \alpha) \to \alpha$. 若点$\alpha$ 在两个方向都是$Poisson$ 稳定的, 则称其为Poisson 稳定.

定义$\mathfrak{N}_\alpha = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R} | \lambda(t_n, \alpha) \to \alpha$, 当 $n \to \infty$ 时$\}$.

定义 4.1.3 给定$\epsilon > 0$, 整数$\tau \in \mathbb{R}$ 称为x 的ϵ-移位 (ϵ-概周期), 若$\rho(\pi(\tau, x), x) < \epsilon$ (对任意的$t \in \mathbb{R}$, 有$\rho(\pi(\tau + t, x), \pi(\tau, x)) < \epsilon$).

定义 4.1.4 点$x \in X$ 称为几乎回复 (概周期), 若对任意的$\epsilon > 0$ 存在正整数l 使得在任意l 长段中存在$x \in X$ 的ϵ-移位(ϵ-概周期).

定义 4.1.5 若点$x \in X$ 是几乎回复的且集合$H(x) := \overline{\{\pi(t,x)|t \in \mathbb{R}\}}$ 是紧致的, 则x 称为回复, 这里$\overline{X}$ 表示X 的闭包.

定义$\mathfrak{N}_x = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R}:$ 使得$\{\pi(t_n,x)\} \to x$ 且 $\{t_n\} \to \infty\}$.

定义 4.1.6 对于动力系统$(X, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 点$x \in X$ 称为Levitan 概周期, 若存在动力系统$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和概周期点$v \in V$ 使得$\mathfrak{N}_v \subseteq \mathfrak{N}_x$.

定义 4.1.7 点$x \in X$ 称为Langrange 稳定(st.L), 若它的轨道$\{\pi(t,x) : t \in \mathbb{R}\}$ 是相对紧致的.

定义 4.1.8 对于动力系统$(X, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 点$x \in X$ 称为概自守, 若下列条件成立:

1. x 是$st.L$;
2. 存在动力系统$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, 从$(X, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 到$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的满同态h 和概周期点$v \in V$ 使得$h^{-1}(v) = \{x\}$.

注 4.1.1

1. 任意概周期函数都是概自守的.
2. 任意概周期点都是回复的.
3. 任意概自守点都是*Levitan* 概周期的.

假设$(X, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为X 的动力系统, V 为一个完备的伪度量空间, Γ 为V 上一族伪度量. 定义$C(X,V)$ 为在紧开拓扑意义下所有连续函数构成的族. 此拓扑可定义伪度量族$\{d_K^\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma, K \in \mathcal{K}(X))$ 为

$$d_K^\gamma(f,g) := \sup_{x\in K} \gamma(f(x), g(x)),$$

这里$\mathcal{K}(X)$ 为X 的所有紧子集构成的族. 对任意$\tau \in \mathbb{R}$ 定义映射$\{\sigma_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, $\sigma_\tau : C(X,V) \to C(X,V)$ 满足下面的性质:

1. $\sigma_0 = id_{C(X,V)}$;

2. $\sigma_{\tau_1} \circ \sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1+\tau_2}$ for $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$;

3. σ_τ 对$\forall \tau \in \mathbb{R}$ 连续.

引理 4.1.1 [65] 由等式$\sigma(\tau, f) := \sigma_\tau f$ $(f \in C(X,V),\ \tau \in \mathbb{R})$ 定义的映射$\sigma : \mathbb{R} \times C(X,V) \to C(X,V)$ 是连续的, 且我们有$(C(X,V), \{\sigma_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}})$ 为$C(X,V)$ 上的动力系统.

定义 4.1.9 假设$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为V 上的动力系统. 连续映射$\varphi : \mathbb{R} \times X \times V \to X$ 称为在X 上关于$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的上闭链, 若其满足下列性质:

1. $\varphi(0, x, v) = x$ $(x \in X, v \in V)$;

2. $\varphi(t + \tau, x, v) = \varphi(\tau, \varphi(t, x, v), \lambda(t, v))$ $(t, \tau \in \mathbb{R}, x \in X, v \in V)$.

这样, (φ, λ) 称为$X \times V$ 上的非自治动力系统.

假设φ 是在X 上关于$(V, \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, $Y := X \times V$ 的上闭链, 且$\pi(t,(x,v)) := (\varphi(t,x,v), \lambda(t,v))$. 则$(Y, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是Y 上的动力系统.

定义 4.1.10 $\mathbb{R}^n$-值随机过程$Z(t)$ 称为依分布概自守(或者为τ-周期, 回复, Poisson 稳定, 概周期, Levitan 概周期), 若其分布$\mu(t)$ 是$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$-值概自守(或者为$\tau$- 周期, 回复, *Poisson* 稳定, 概周期, *Levitan* 概周期) 映射.

注 4.1.2 我们知道对随机变量序列来说$\mathcal{L}^2$ 收敛可以推出依分布收敛, 所以$\mathcal{L}^2$ 概自守(或者为τ-周期, 回复, *Poisson* 稳定, 概周期, *Levitan* 概周期) 过程必然是依分布概自守的(或者为τ-周期, 回复, *Poisson* 稳定, 概周期, *Levitan* 概周期); 但是反之不真.

§4.2 依分布回复性相容和一致相容运动

§4.2.1 依分布回复性相容运动

假设(φ, λ) 为在$X \times V$ 上的非自治动力系统. 则$(Y, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是$Y := X \times V$ 上的动力系统, 这里$\pi(t,(x,v)) := (\varphi(t,x,v), \lambda(t,v))$.

定义 4.2.1 若$\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_y$, 则点$y \in Y$ 称为关于$\alpha \in V$ 回复性相容.

注意到若$\alpha \in V$ 为Poisson 稳定的, 则存在子列$\{|t_n|\} \to +\infty$ 使得$\lambda(t_n, \alpha) \to \alpha$, 即$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha$. 根据定义4.2.1, 我们有$\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_y$, 且$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_{y_\alpha}$. 因此, 存在子列$\{|t_n|\} \to +\infty$ 使得$\pi(t_n, y) \to y$, 即y 是Poisson 稳定的. 通过上面的论述, 进一步我们还可以得到下面的注.

注 4.2.1 [66] 若点$y \in Y$ 是关于$\alpha \in V$ 回复性相容的, 且点α 是平稳的(或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定), 则点y 也是平稳的(或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定).

定义

$$\mathcal{E}_\alpha := \{\xi(\cdot)|_{Y_\alpha} | \exists \{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha \text{ 使得 } \pi(t_n, \cdot)|_{Y_\alpha} \to \xi(\cdot)|_{Y_\alpha}\},$$

这里$Y_\alpha := \{y \in Y | y := (x, \alpha) \in X \times \{\alpha\}\}$ 且$\to$ 意味着逐点收敛.

定义 4.2.2 假设(φ, λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, M 是Y 上子集. 若对任意的相对紧子集$V' \subseteq V$, $\{y \in Y | y = (x, v) \in X \times V'\} \cap M$ 是Y 中相对紧子集, 则子集M 称为条件相对紧的; 特别地, 对任意的v, $M_v := \{y \in Y | y = (x, v) \in Y \times \{v\}\} \cap M$ 是相对紧的. 集合M 称为条件紧的, 若它是闭的且条件相对紧.

注 4.2.2 假设X 为紧空间, $Y : X \times V$. 则空间Y 为条件紧的, 但它不是紧的.

引理 4.2.1 [33] 假设(φ, λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, $y_0 := (u_0, \alpha_0) \in Y := X \times V$, $(Y, \{\pi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ 为Y 上动力系统, 集合$Q_{(u_0, \alpha_0)} := \overline{\{\varphi(t, u_0, \alpha_0) | t \in \mathbb{R}\}}$ 是紧致的. 则集合$H(y_0) := \overline{\{\pi(t, y_0) | t \in \mathbb{R}\}}$ 为条件紧的.

引理 4.2.2 [65,67] 设(φ, λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, $(Y, \{\pi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ 为$Y := X \times V$ 上的动力系统. 若$\alpha \in V$ 是*Poisson* 稳定点, Y 是相对紧空间. 则$\mathcal{E}_\alpha$ 是半群$Y_\alpha^{Y_\alpha}$ 的非空紧子半群(半群上的乘法为映射的复合).

定义 4.2.3 假设我们给定两个空间X 和V, 其上分别有σ-代数$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$, $f : X \to V$ 为$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-可测映射. 则对任意$\mathcal{A}$ 上有界测度μ,

$$f^* * \mu : B \mapsto \mu\left(f^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B},$$

定义在$\mathcal{B}$上的测度称为在映射f下的测度μ的像.

定义 4.2.4 设$\mathcal{L}_X$为X的分布. 定义$Y := X \times V$的半分布为$\mathcal{L}_Y := \mathcal{L}_X \times V$.

注意到(φ, λ)为$X \times V$上非自治动力系统, 且$(Y, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$是$Y$上动力系统. 则$(\mathcal{L}_x, \{\varphi_t^* * \mu_x\}_{t\in\mathbb{R}})$是$\mathcal{L}_X$动力系统, 这里$\mu_x$为关于$x \in X$的分布. 对任意的$\mu_y := (\mu_x, v) \in \mathcal{L}_Y$, 令$\theta(t, \mu_y) := (\varphi_t^* * \mu_x, \lambda(t, v))$, 则我们不难推得$(\mathcal{L}_Y, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$为$\mathcal{L}_Y$上动力系统. 从而对任意的$y_1, y_2 \in Y$和$t \in \mathbb{R}$, 我们可以定义新的度量为

$$\beta_Y(\theta(t, \mu_{y_1}), \theta(t, \mu_{y_2})) := \left(\beta^2(\varphi_t^* * \mu_{x_1}, \varphi_t^* * \mu_{x_2}) + \rho^2(\lambda(t, v_1), \lambda(t, v_2))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义

$$\mathfrak{N}_{\mu_y} = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R} : \text{使得当}\{t_n\} \to \infty\text{ 时}, \{\theta(t_n, \mu_y)\} \to \mu_y\}.$$

定义 4.2.5 若$\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_{\mu_x}$, 则点$x \in X$称为关于$\alpha \in V$依分布回复性相容.

定义 4.2.6 若$\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_{\mu_y}$, 则点$y \in Y$称为关于$\alpha \in V$依半分布回复性相容.

推论 4.2.1 若点$y \in Y$是关于$\alpha \in V$依半分布回复性相容的, 点α平稳(或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定), 则点y是依半分布平稳的(或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定).

证明 推论可直接由定义4.2.6和注4.2.1 得到. □

引理 4.2.3 假设概率测度$\{\mu(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$族$\mu(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$是关于随机过程$Z(t)$的分布族. 若$Z(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则$\{\mu(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$在弱拓扑意义下包含于$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$中的紧集.

证明 假设$\Lambda_\mu := \{\mu(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$上的Borel 集合. 对$\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu(t, A) := P\{Z(t) \in A\}$. 由已知条件$Z(t)$是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则存在常数$M > 0$使得$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbf{E}\|Z(t)\|^2 \le M$. 对$\forall \mu \in \Lambda_\mu$和$\forall \delta > 0$, 根据Chebyshev 不等式, 我们有当$\delta \to +\infty$时,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mu(t, \mathbb{R}^n - \overline{B(0,\delta)}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} P\{\|Z(t)\| > \delta\} \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\mathbf{E}\|Z(t)\|^2}{\delta^2} \le \frac{M}{\delta^2} \to 0,$$

这里$\overline{B(0,\delta)}$ 是以原点为圆心δ 为半径的闭球. 我们注意到$\overline{B(0,\delta)}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的紧集. 根据一致胎紧的定义和μ 的任意性, 则Λ_μ 是一致胎紧的. 再根据Prohorov 定理, 则Λ_μ 是弱相对紧的, 即Λ_μ 包含于$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 中的紧集. □

定义

$$\mathcal{E}_\mu := \{\xi^* * \cdot|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}} | \exists \{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha \text{ 使得} \theta(t_n,\cdot)|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}} \to \xi^* * \cdot|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\},$$

这里$Y_\alpha := \{y \in Y | y := (x,\alpha) \in X \times \{\alpha\}\}$, $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$.

引理 4.2.4 *假设(φ,λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, $(Y,\{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$Y := X \times V$ 上动力系统. 若$X \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, $\alpha \in V$ 为Poisson 稳定点. 则$\mathcal{E}_\mu$ 是半群$\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}$ 的非空紧半群(半群上的乘法为映射的复合), 这里$\mathcal{L}_{Y_\alpha}$ 是Y_α 的半分布.*

证明 假设$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha$ 和$\xi \in \mathcal{E}_\alpha$, 则有当$n \to \infty$ 时, $\lambda(t_n,\alpha) \to \alpha$.

由已知X 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 由引理4.2.3, X 的分布$\mathcal{L}_X$ 是预紧的. 则$\overline{\mathcal{L}_Y} := \overline{\mathcal{L}_X} \times V$ 是条件紧的. 根据定义4.2.2, $\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}$ 是紧致的. 因此, 我们有集合$Q := \overline{\cup\{\theta(t_n,\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}})|n \in \mathbb{N}\}}$ 是紧致的. 根据Tychonoff 定理, $\{\theta(t_n,\cdot)|_{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}\} \subseteq Q^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$ 是预紧的.

类似于在 [65,67] 中的证明. 注意到$(\mathcal{L}_Y,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是$\mathcal{L}_Y$ 上动力系统, 且$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha$. 则当$n \to \infty$ 时, 从$\mathcal{L}_Y$ 到V 的投影: $\theta_V(t_n,\mathcal{L}_{Y_\alpha}) = \lambda(t_n,\alpha) \to \alpha$. 因此, 当$n \to \infty$ 时, $\theta_V^{-1}(t_n,\mathcal{L}_{Y_\alpha}) \to \mathcal{L}_{Y_\alpha}$, 即对任意的$\mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}$ 有$\xi^* * \mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}$. 因此, 我们有$\mathcal{E}_\mu \subseteq \mathcal{L}_{Y_\alpha}^{\mathcal{L}_{Y_\alpha}} \subseteq \overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$.

现在我们来证明$\mathcal{E}_\mu$ 是$\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$ 中的闭集.

对任意$\mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}$, 我们假设$\xi^* * \mu_y$ 在$\mathcal{E}_\mu \in \overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$ 的闭包中, $k \in \mathbb{N}$ 是任意自然数, $U(\xi^* * \mu_y)$ 为$\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$ 中$\xi^* * \mu_y$ 的任意邻域, 则存在点$\eta^* * \mu_y \in \mathcal{E}_\mu$ 使得$\eta^* * \mu_y \in U(\xi^* * \mu_y)$. 令$U(\eta^* * \mu_y)$ 为$\eta^* * \mu_y$ 的邻域使得$U(\eta^* * \mu_y) \subset U(\xi^* * \mu_y)$. 由于$\eta^* * \mu_y \in \mathcal{E}_\mu$, 则存在$t_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$t_k > k\ , \rho(\lambda(t_k,\alpha),\alpha) < 1/k \text{ 且 } \theta_{t_k}(\cdot)|_{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}} \in U(\eta^* * \mu_y). \tag{4.2.1}$$

根据(4.2.1) 我们有$\{t_k\} \in \mathfrak{N}_\alpha$ 且当$k \to \infty$ 时, $\theta_{t_k}(\cdot)|_{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}} \to \xi^* * \mu_y$. 同时我们还注意到$\theta_{t_k}(\cdot)|_{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}} \in \overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}^{\overline{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}}$.

综上所述$\mathcal{E}_\mu$ 是闭的, 即$\mathcal{E}_\mu$ 是紧致的.

设$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathcal{E}_\alpha$, 则$\xi_1\cdot\xi_2(y):=\xi_1(\xi_2(y))\in\mathcal{E}_\alpha$. 下面我们来证明$(\xi_1^**\xi_2^*)*\mu_y:=\mu_y\left(\xi_2^{-1}(\xi_1^{-1})\right)\in\mathcal{L}_{Y_\alpha}^{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}$. 注意到

$$\xi^**\mu_y:=(\xi_1^**\xi_2^*)*\mu_y\in\mathcal{L}_{Y_\alpha}^{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\quad \text{且}\ \theta(t_n^i,\cdot)|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\to\xi_i^**\cdot|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\ \ (i=1,2).$$

则有

$$\xi_1^**(\theta_{t_n}^2*\mu_y)\to(\xi_1^**\xi_2^*)*\mu_y=\xi^**\mu_y,\quad \text{当}\ n\to\infty\quad\text{时},$$

即存在常数$n_2(\xi^**\mu_y)\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n\ge n_2(\xi^**\mu_y)$, 有$\xi_1^**(\theta_{t_n}^2*\mu_y)\in U_{\xi^**\mu_y}$, 这里$U_{\xi^**\mu_y}$ 为$\xi^**\mu_y$ 的任意开邻域. 我们固定$n\ge n_2(\xi^**\mu_y)$, 则存在常数$m_n(\xi^**\mu_y)\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n\ge n_2(\xi^**\mu_y)$ 和$m\ge m_n(\xi^**\mu_y)$, 有$\theta_{t_m}^1*\theta_{t_n}^2|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\in U_{\xi_1^**(\theta_{t_n}^2*\mu_y)}$, 这里$U_{\xi_1^**(\theta_{t_n}^2*\mu_y)}\subset U_{\xi^**\mu_y}$ 为$\xi_1^**(\theta_{t_n}^2*\mu_y)$ 的开邻域. 因此存在$\{t_m^1+t_n^2\}$ 的子列$\{t_{m_k}^1+t_{n_k}^2\}$ 使得当$t_{m_k}^1+t_{n_k}^2\to\infty$ 时,

$$\theta(t_{m_k}^1+t_{n_k}^2,\cdot)|_{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}\to\xi^**\mu_y,$$

即$\xi^**\mu_y=(\xi_1^**\xi_2^*)*\mu_y\in\mathcal{E}_\mu$. 于是, 我们有

$$(\xi_1^**\xi_2^*)*\xi_3^**\mu_y=(\xi_1^**\xi_2^*)*\mu_y(\xi_3^{-1})=\mu_y\left(\xi_3^{-1}(\xi_2^{-1}(\xi_1^{-1}))\right)$$

和

$$\xi_1^**(\xi_2^**\xi_3^*)*\mu_y=\xi_1^**\mu_y(\xi_3^{-1}(\xi_2^{-1}))=\mu_y\left(\xi_3^{-1}(\xi_2^{-1}(\xi_1^{-1}))\right).$$

综上所述, $\mathcal{E}_\mu$ 为半群. □

定理 4.2.1 *假设(φ,λ) 为$X\times V$ 上非自治动力系统, $(Y,\{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$Y:=X\times V$ 上动力系统, $X\subseteq\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的. 若下列假设成立:*

1. *存在一个Poisson 稳定点$\alpha\in V$;*

2. *对任意的$y_1,y_2\in Y_\alpha:=\{y\in Y|y:=(x,\alpha)\in X\times\{\alpha\}\}$, 有*

$$\lim_{|t|\to\infty}\rho(\pi(t,y_1),\pi(t,y_2))=0.$$

则对任意的$\xi\in\mathcal{E}_\alpha$, 存在唯一的$y_\alpha\in Y_\alpha$ 的半分布μ_{y_α} 使得$\xi^**\mu_{y_\alpha}=\mu_{y_\alpha}$.

证明 根据引理4.2.4, $\mathcal{E}_\mu$ 是紧半群. 设$I \subseteq \mathcal{E}_\mu$ 是紧半群$\mathcal{E}_\mu$ 的最小左理想, $u \in I$ 为I 中任意幂等元, 则有$u^2 = u$. 根据$\mathcal{E}_\mu \circ u = I$ (参见引理1.4.3), 对任意的$\mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 我们有$\mathcal{E}_\mu \circ u(\mu_y) = I(\mu_y)$.

对任意的$\xi \in \mathcal{E}_\alpha$ 和$y \in Y_\alpha$, 存在唯一的$y_\xi \in Y_\alpha$ 使得$\xi(y) = y_\xi$, 即集合$\xi(Y_\alpha)$ 由单点集构成. 反证法我们假设结论不真, 则存在$y_1, y_2 \in Y_\alpha (y_1 \neq y_2)$ 使得$\xi(y_i) = y_{\xi_i} (y_{\xi_1} \neq y_{\xi_2}, i = 1, 2)$. 特别地, 存在子列$\{|t_n|\} \to +\infty$ 使得

$$\{\pi(t_n, y_i)\} \to y_{\xi_i} (i = 1, 2).$$

则我们有

$$\rho(y_{\xi_1}, y_{\xi_2}) = \lim_{n \to +\infty} \rho(\pi(t_n, y_1), \pi(t_n, y_2)) = 0,$$

即$y_{\xi_1} = y_{\xi_2}$, 这与假设矛盾. 由于$\xi(Y_\alpha) \subseteq Y_\alpha$ 是由单点集构成的, 则$\xi(Y_\alpha)$ 的分布也是由单点集构成的. 定义$M_{\mu_y} := u(\mathcal{L}_{Y_\alpha})$, 则对任意的$\mu_y \in M_{\mu_y}$, 我们有$u(\mu_y) = \mu_y$. 另一方面, 不难看出$M_{\mu_y}$ 是由单点集构成的.

根据Heine 定理和假设条件对任意的$y_1, y_2 \in Y_\alpha$, 有$\lim_{|t| \to \infty} \rho(\pi(t, y_1), \pi(t, y_2)) = 0$. 则对任意的$y \in Y_\alpha$ 和子列$|t_n| \to \infty (n \to \infty)$, 我们有

$$\lim_{n \to \infty} \pi(t_n, y) \to \lim_{|t| \to \infty} \pi(t, y),$$

即对$\{t_n^i\} \in \mathbb{R}(i = 1, 2)$, $\lim_{n \to \infty} \rho(\pi(t_n^1, y), \pi(t_n^2, y)) = 0$. 我们注意到$(\mathcal{L}_Y, \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ 为$\mathcal{L}_Y$ 上动力系统. 对任意的$y_1, y_2 \in Y_\alpha$, 定义μ_{y_1} 和μ_{y_2} 分别为y_1 和y_2 的分布. 在定理假设条件下对任意的$\mu_{y_1}, \mu_{y_2} \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}$, 我们有

$$\lim_{|t| \to \infty} \beta_Y(\theta(t, \mu_{y_1}), \theta(t, \mu_{y_2})) = 0.$$

于是对$\{t_n^i\} \in \mathbb{R}(i = 1, 2)$, 我们可以得到

$$\lim_{n \to \infty} \beta_Y(\theta(t_n^1, \mu_y), \pi(t_n^2, \mu_y)) = 0,$$

即$I(\mu_y) = u(\mu_y) = M_{\mu_y}$.

注意到对任意的$\mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha} = \{\mu_{y_\alpha}\}$, $\mathcal{E}_\mu \circ u(\mu_y) = I(\mu_y) = M_{\mu_y}$. 因此对任意的$\xi \in \mathcal{E}_\alpha$, 我们有$\xi^* * \mu_y = \mu_y$.

现在我们来证明半群$\mathcal{E}_\mu$ 有唯一的不动分布. 反证法, 假设结论不真, 则存在$\mu_{y_1}, \mu_{y_2} \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}(\mu_{y_1} \neq \mu_{y_2})$ 使得对任意的$\xi \in \mathcal{E}_\alpha$, $\xi^* * \mu_{y_i} = \mu_{y_i}(i = 1, 2)$. 特别地, 存在子列$\{|t_n|\} \to \infty$ 使得当$n \to \infty$ 时,

$$\beta_Y(\theta(t_n, \mu_{y_i}), \mu_{y_i}) \to 0(i = 1, 2).$$

于是我们有

$$\beta_Y(\mu_{y_1}, \mu_{y_2}) = \lim_{n\to\infty} \beta_Y(\theta(t_n, \mu_{y_1}), \theta(t_n, \mu_{y_2})) = 0,$$

即$\mu_{y_1} = \mu_{y_2}$, 这与假设矛盾. 证明完毕. □

注 4.2.3 假设$y_1, y_2 \in Y$ 且$y_1 \neq y_2$. 虽然y_1 和y_2 是不同的点, 但y_1 可以和y_2 同分布. 因此, 一个分布可能对应着两个甚至多个不同的点.

推论 4.2.2 *假设(φ, λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, $(Y, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$Y := X \times V$ 上动力系统, $y := (x, \alpha) \in Y$. 令$H(y) := \overline{\{\pi(t, y)|t \in \mathbb{R}\}}$. 若下列条件成立:*

1. *集合$Q(x, \alpha) := \overline{\{\varphi(t, x, \alpha)|t \in \mathbb{R}\}} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的;*
2. *$\alpha \in V$ 为Poisson 稳定点;*
3. *对任意的$y_1, y_2 \in H(y) \cap Y_\alpha$, 有*

$$\lim_{|t|\to\infty} \rho(\pi(t, y_1), \pi(t, y_2)) = 0,$$

其中$Y_\alpha := \{y \in Y|y := (x, \alpha) \in X \times \{\alpha\}\}$.

则存在唯一的$y_\alpha \in H(y) \cap Y_\alpha$ 的半分布μ_{y_α} 使得对任意的$\xi \in \mathcal{E}_\alpha$, $\xi^* * \mu_{y_\alpha} = \mu_{y_\alpha}$.

证明 类似于定理4.2.1 的证明, 将空间改为$H(y) \times H(\alpha)$, 则结论是显然的. □

定理 4.2.2 *假设(φ, λ) 为$X \times V$ 上非自治动力系统, $(Y, \{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$Y := X \times V$ 上动力系统, $X \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的. 若下列条件成立:*

1. *存在一个Poisson 稳定点$\alpha \in V$;*

2. 对任意的$y_1, y_2 \in Y_\alpha := \{y \in Y | y := (x, \alpha) \in X \times \{\alpha\}\}$, 有

$$\lim_{|t|\to\infty} \rho(\pi(t, y_1), \pi(t, y_2)) = 0.$$

则存在至少一个点$y_\alpha \in Y_\alpha$ 关于$\alpha \in V$ 依半分布回复性相容, 且使得对任意的$\mu_y \in \mathcal{L}_{Y_\alpha}$,

$$\lim_{|t|\to\infty} \beta_Y(\theta(t, \mu_y), \theta(t, \mu_{y_\alpha})) = 0. \tag{4.2.2}$$

证明　由定理4.2.1, 半群$\mathcal{E}_\alpha$ 中存在至少一个点$y_\alpha \in Y_\alpha$ 使得其半分布是唯一的且有$\xi^* * \mu_{y_\alpha} = \mu_{y_\alpha}$. 我们证明结论成立只需证明半分布$\mu_{y_\alpha}$ 就是我们所求的点.

假设$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\alpha$, 则$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_{y_\alpha}$, 即$\{t_n\} \in \mathfrak{N}_{\mu_{y_\alpha}}$. 反证法, 假设结论不真, 则存在两个子列$\{t_{n_k^i}\} \subset \{t_n\}(i = 1, 2)$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} \pi(t_{n_k^i}, y_\alpha) = y_i(i = 1, 2)$$

且$y_1 \neq y_2$. 因此,

$$\lim_{k\to+\infty} \theta(t_{n_k^i}, \mu_{y_\alpha}) = \mu_{y_i}(i = 1, 2)$$

且$\mu_{y_1} \neq \mu_{y_2}$, 其中$\{\theta(t_{n_k^i}, \mu_{y_\alpha})\}$ 为$\mathcal{L}_{Y_\alpha}$ 上动力系统. 不失一般性, 我们可以假设半分布$\{\theta(t_{n_k^i}, \cdot)\}$ 收敛于$\mathcal{L}_{Y_\alpha}^{\mathcal{L}_{Y_\alpha}}$. 令$\xi_i^* * \cdot := \lim_{k\to+\infty} \theta(t_{n_k^i}, \cdot)$, 则$\xi_i^* * \cdot \in \mathcal{E}_\mu$ 且我们有$\mu_{y_1} = \xi_1^* * \mu_y = \xi_2^* * \mu_y = \mu_{y_2}$, 这与假设矛盾. 证明完毕. □

推论 4.2.3 假设$\alpha \in V$ 是平稳点*(*或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定*)*. 则在满足定理*4.2.2* 的条件下, 存在至少一个点$y_\alpha \in Y_\alpha$ 是依分布平稳的*(*或者为τ-周期, 概自守, *Levitan* 概周期, 回复, *Poisson* 稳定*)* 使得(4.2.2) 对任意的$y \in Y_\alpha$ 成立.

证明　推论可由定理4.2.2 和推论4.2.1 直接得到. □

§4.2.2 依分布回复性一致相容运动

我们令

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R} |\ \text{序列}\{\lambda(t_n, \alpha)\}\ \text{收敛}\}$$

和

$$\mathfrak{M}_y = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R} |\ \text{序列}\{\pi(t_n, y)\}\ \text{收敛}\}.$$

定义 4.2.7 若$\mathfrak{M}_\alpha \subseteq \mathfrak{M}_y$, 则点$y \in Y$ 称为关于$\alpha \in V$ 回复性一致相容 .

类似于注4.2.1, 若$\alpha \in V$ 是Poisson 稳定的, 则存在子列$\{|t_n|\} \to +\infty$ 使得$\lambda(t_n, \alpha) \to \alpha$, 即存在$\{t_n\} \in \mathfrak{M}_\alpha$ 使得序列$\{\lambda(t_n, \alpha)\}$ 是收敛的. 根据定义4.2.7, 我们有$\mathfrak{M}_\alpha \subseteq \mathfrak{M}_y$, 则$\{t_n\} \in \mathfrak{M}_{y_\alpha}$. 因此, 存在序列$\{|t_n|\} \to +\infty$ 使得序列$\{\pi(t_n, y)\}$ 收敛, 即当$|t_n| \to +\infty$ 时, $\pi(t_n, y) \to y$. 也就是说, y 是Poisson 稳定的. 进一步, 我们可以得到下面的注.

注 4.2.4 [66] 若点$y \in Y$ 是关于$\alpha \in V$ 回复性一致相容的, 且α 是平稳的(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, *Poisson* 稳定), 则点y 也是平稳的(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, *Poisson* 稳定).

我们令

$$\mathfrak{M}_{\mu_y} = \{\{t_n\} \subset \mathbb{R} |\ \text{序列}\{\theta(t_n, \mu_y)\}\ \text{是弱收敛的}\}.$$

定义 4.2.8 若$\mathfrak{M}_\alpha \subseteq \mathfrak{M}_{\mu_x}$, 则点$x \in X$ 称为关于$\alpha \in V$ 依分布回复性一致相容 .

定义 4.2.9 若$\mathfrak{M}_\alpha \subseteq \mathfrak{M}_{\mu_y}$, 则点$y \in Y$ 称为关于$\alpha \in V$ 依半分布回复性一致相容 .

推论 4.2.4 若点$y \in Y$ 是关于$\alpha \in V$ 依半分布回复性一致相容且α 是平稳的(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, *Poisson* 稳定), 则y 是依半分布平稳的(或者为τ-周期, 回复, 概周期, 概自守, *Poisson* 稳定).

证明 推论可直接由定义4.2.9 和注4.2.4 得到. □

定理 4.2.3 假设(φ,λ) 为$X\times V$ 上的非自治动力系统, $(Y,\{\pi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为Y 上的动力系统, $X\subseteq\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, V 是紧的度量空间. 若下列条件成立:

1. 点$\alpha\in V$ 是回复点;
2. 对任意的$y_1,y_2\in\{y\in Y|y:=(x,v)\in X\times\{v\}$ 对任意$v\in V\}$, 有

$$\lim_{|t|\to\infty}\rho(\pi(t,y_1),\pi(t,y_2))=0.$$

则存在至少一个点$y_\alpha\in Y_\alpha$ 关于$\alpha\in V$ 依半分布回复性一致相容, 使得对任意$y\in Y_\alpha$ 有(4.2.2).

证明 根据定理4.2.1, 存在至少一个点$y_\alpha\in Y_\alpha$ 使得其半分布唯一且有$\xi^**\mu_{y_\alpha}=\mu_{y_\alpha}$. 根据推论4.2.1, 点$y_\alpha$ 是依半分布回复的. 下面我们来证明半分布μ_{y_α} 即为所求.

由已知X 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 根据引理4.2.3, X 的分布$\mathcal{L}_X$ 是预紧的. 由于V 是紧空间, 则$\overline{\mathcal{L}_Y}:=\overline{\mathcal{L}_Y}\times V$ 也是紧致的. 令$M:=\overline{\{\theta(t,\mu_{y_\alpha}):t\in\mathbb{R}\}}$, 其中$\{\theta(t,\mu_{y_\alpha})\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是$\mathcal{L}_{Y_\alpha}$ 上动力系统. 我们注意到点y_α 是依分布回复的, 则有M 是紧最小集.

类似于 [33] 中的证明, 我们下面来证明$M_q:=M\cap\mathcal{L}_{Y_q}$ (对任意的$q\in H(\alpha):=\overline{\{\lambda(t,\alpha):t\in\mathbb{R}\}}$) 由单点集构成. 反证法, 若假设结论不真, 则存在$q_0\in H(\alpha)$ 和$\mu_{y_1},\mu_{y_2}\in M_{q_0}$ 使得$\mu_{y_1}\neq\mu_{y_2}$. 根据定理4.2.2, 存在至少一个点y_{q_0} 其关于q_0 唯一依半分布回复性相容, 即$\mu_{y_{q_0}}\in M_{q_0}$ 是回复的. 这里我们不妨设$\mu_{y_{q_0}}=\mu_{y_1}$. 由于集合M 是最小集, 则存在序列$\{t_n\}\in\mathfrak{N}_{q_0}$ 使得当$n\to\infty$ 时, $\theta(t_n,\mu_{y_1})\to\mu_{y_2}$. 另一方面, 根据定理4.2.2, 我们有$\mathfrak{N}_{q_0}\subseteq\mathfrak{N}_{\mu_{y_1}}$. 则$n\to\infty$ 时, $\theta(t_n,\mu_{y_1})\to\mu_{y_1}$. 这与我们的假设矛盾.

现在我们来证明$\mathfrak{M}_\alpha\subseteq\mathfrak{M}_{y_\alpha}$. 令$\{t_n\}\in\mathfrak{M}_\alpha$, 则$\{t_n\}\in\mathfrak{M}_{y_\alpha}$, 即$\{t_n\}\in\mathfrak{M}_{\mu_{y_\alpha}}$. 我们再一次使用反证法,假设结论不真, 则存在两个子列$\{t_{n_k^i}\}\subset\{t_n\}(i=1,2)$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\pi(t_{n_k^i},y_\alpha)=y_i(i=1,2)$$

且$y_1\neq y_2$. 因此,

$$\lim_{k\to+\infty}\theta(t_{n_k^i},\mu_{y_\alpha})=\mu_{y_i}(i=1,2)$$

且$\mu_{y_1} \neq \mu_{y_2}$, 其中$\{\theta(t_{n_k^i}, \mu_{y_\alpha})\}$ 为$\mathcal{L}_Y$ 上动力系统. 令$q_0 := \lim_{n\to+\infty} \lambda(t_n, \alpha)$, 则$q_0 \in H(\alpha)$ 且$\mu_{y_1}, \mu_{y_2} \in M_{q_0}$. 由于对任意的$q \in H(\alpha)$, M_q 是由单点集构成的, 这与假设矛盾. 证明完毕. □

推论 4.2.5 *假设$\alpha \in V$ 是平稳的(或者为τ-周期, 概周期, 回复). 若定理4.2.3 的条件成立, 则存在至少一个点$y_\alpha \in Y_\alpha$ 是依半分布平稳的(或者为τ-周期, 概周期, 回复) 使得对任意的$y \in Y_\alpha$ 有(4.2.2) 成立.*

证明 推论可直接由定理4.2.3 和推论4.2.4 得到. □

§4.3 Gauss 噪音驱动的线性随机微分方程的概周期解和概自守解

设$L_b(B)$ 表示Banach 空间B 上所有有界线性算子构成的空间. 令$C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n))$ 表示所有连续算子值函数$A : \mathbb{R} \to L_b(\mathbb{R}^n)$ 在紧开拓扑意义下构成的空间, $(C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n)), \{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n))$ 上的移位动力系统.

考虑下列Gauss 噪音驱动的线性随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}t + g(t)X(t)\mathrm{d}W(t) + h(t)\mathrm{d}W(t) \tag{4.3.1}$$

和其相关的齐次方程

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t + g(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \tag{4.3.2}$$

这里$A \in C(\mathbb{R}, L_b(\mathbb{R}^n))$, $f : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $g : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $h : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. 除了方程(4.3.1) 和(4.3.2) 外, 我们还可以考虑方程(4.3.1) 和(4.3.2) 的壳方程, 也就是方程

$$\mathrm{d}Z(t) = B(t)Z(t)\mathrm{d}t + f'(t)\mathrm{d}t + g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t) + h'(t)\mathrm{d}W(t) \tag{4.3.3}$$

和其相关的齐次方程

$$\mathrm{d}Z(t) = B(t)Z(t)\mathrm{d}t + g'(t)Z(t)\mathrm{d}W(t). \tag{4.3.4}$$

这里$(B,f',g',h')\in H(A,f,g,h):=\overline{\{(A_\tau,f_\tau,g_\tau,h_\tau)|\tau\in\mathbb{R}\}}$, 其中$A_\tau(t):=A(t+\tau)$, $f_\tau(t):=f(t+\tau)$, $g_\tau(t):=g(t+\tau)$, $h_\tau(t):=h(t+\tau)$, $t\in\mathbb{R}$. 设(4.3.3) 方程的解为$\varphi(t,z,(B,f',g',h'))$.

令$V:=H(A,f,g,h)$, $Y:=\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)\times V$. 定义$H(A,f,g,h)$ 上的移位动力系统为$(V,\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, 对任意的$(z,(B,f',g',h'))\in Y$ 和$t\in\mathbb{R}$ 定义

$$\pi(t,(z,B)):=(\varphi(t,z,(B,f',g',h')),B_t,f'_t,g'_t,h'_t).$$

这里我们注意到$\varphi(t,z,(B,f',g',h'))$ 并不是$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 上的动力系统, 因为$\varphi(t+s,z,(B,f',g',h'))$ 不是方程(4.3.3) 的解. 但是$\varphi(t,z,(B,f',g',h'))$ 的分布$\mu_\varphi(t):=\varphi_t^* * \mu_z$ 是$\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 的分布$\mathcal{P}(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n))$ 上的动力系统. 对任意的$\mu_y:=(\mu_z,v)\in\mathcal{P}(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n))\times V$ 和$\mathcal{L}_Y:=\mathcal{P}(\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n))\times V$, 令$\theta(t,\mu_y):=(\varphi_t^* * \mu_z,\sigma(t,v))$, 则我们不难推得$(\mathcal{L}_Y,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为$\mathcal{L}_Y$ 上的动力系统, 即(μ_φ,σ) 是$\mathcal{L}_Y$ 上的非自治动力系统.

定义 4.3.1 方程(4.3.1) 的解$\varphi\in\mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 称为依分布回复性相容 *(简称为依分布相容)*, 若$\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)}\subseteq\mathfrak{N}_{\mu_\varphi}$, 这里$\mu$ 是φ 的分布, $\mathfrak{N}_{(A,f,g,h)}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|(A_{t_n},f_{t_n},g_{t_n},h_{t_n})\to(A,f,g,h)\}$ 并且$\mathfrak{N}_{\mu_\varphi}=\{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|\beta(\mu(t_n),\mu)\to 0\}$.

引理 4.3.1 假设$(A,f,g,h)\in C(\mathbb{R},L_b(\mathbb{R}^n))\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ 是*Poisson* 稳定的. 若下列条件成立:

1. 方程(4.3.1) 存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解$\varphi(t,x_0,(A,f,g,h))$;
2. 方程(4.3.2) 在$\mathbb{R}$ 上的所有$\mathcal{L}^2$-有界解趋于零当时间趋于∞ 时, 即若$\varphi(t,x,(A,g))$ 是$\mathcal{L}^2$-有界解, 则

$$\lim_{|t|\to\infty}\|\varphi(t,x,(A,g))\|_2=0.$$

则方程(4.3.1) 存在至少一个依分布相容解, 其值域包含在集合$Q_{(x_0,(A,f,g,h))}:=\overline{\varphi(\mathbb{R},x_0,(A,f,g,h))}$ 中.

证明 我们设(μ_φ,σ) 是$\mathcal{L}_Y$ 上的非自治动力系统. 由方程(4.3.1), 我们不难得到$(\mathcal{L}_Y,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是$\mathcal{L}_Y$ 上的动力系统. 根据引理4.2.3, 集合$Q_{(x_0,(A,f,g,h))}$ 的

分布$\overline{\mathcal{L}_{Q_{(x_0,(A,f,g,h))}}}$ 是紧致的. 再由引理4.2.1 和引理4.2.4 的证明, 我们有不变集$H(y_0)$ 的半分布$\overline{\mathcal{L}_{H(y_0)}}$ 是条件紧的(这里$y_0 := (x_0,(A,f,g,h)) \in Y$ 且$H(y_0) := \overline{\{\pi(t,y_0)|t\in\mathbb{R}\}}$). 令$y_1, y_2 \in H(y_0)\cap Y_{(A,f,g,h)}$, 其中$Y_{(A,f,g,h)} := \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)\times\{(A,f,g,h)\}$ (即$y_i = (x_i,(A,f,g,h))$ 且$x_i \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)(i=1,2)$), 则有

$$\lim_{|t|\to\infty}\rho(\pi(t,y_1),\pi(t,y_2)) = \lim_{|t|\to\infty}\|\varphi(t,x_1,(A,f,g,h)) - \varphi(t,x_2,(A,f,g,h))\|_2 = 0.$$

应用定理4.2.1, 4.2.2 和推论4.2.2, 证明完毕. □

定理 4.3.1 *设(A,f,g,h) 是概自守的(或者为τ-周期, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定). 若引理4.3.1 的条件成立则方程(4.3.1) 存在至少一个依分布概自守解(或者为τ-周期, Levitan 概周期, 回复, Poisson 稳定).*

证明 定理可通过引理4.3.1 和推论4.2.3 得到. □

推论 4.3.1 *设(A,f,g,h) 是概周期的. 若引理4.3.1 的条件成立, 则方程(4.3.1) 存在至少一个依分布概自守解.*

证明 推论可通过定理4.3.1 得到, 因为任意概周期函数都是概自守的. □

定义 4.3.2 *方程(4.3.1) 的解$\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)$ 称为依分布回复性一致相容 (简称为依分布一致相容), 若$\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu_\varphi}$, 这里$\mu$ 是φ 的分布, $\mathfrak{M}_{(A,f,g,h)} = \{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|$ 使得序列$\{(A_{t_n},f_{t_n},g_{t_n},h_{t_n})\}$ 收敛$\}$ 且$\mathfrak{M}_{\mu_\varphi} = \{\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}|$ 使得序列$\{\varphi_{t_n}\}$ 的分布$\{\mu(t_n)\}$ 弱收敛$\}$.*

引理 4.3.2 *假设$(A,f,g,h) \in C(\mathbb{R},L_b(\mathbb{R}^n))\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ 是回复的. 若下列条件成立:*

1. *方程(4.3.1) 存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解$\varphi(t,x_0,(A,f,g,h))$;*
2. *对任意的$B\in H(A)$ 方程(4.3.4) 在$\mathbb{R}$ 上的$\mathcal{L}^2$-有界解趋于零当时间趋于∞ 时, 即若$\varphi(t,x,(B,g'))$ 是$\mathcal{L}^2$-有界解, 则*

$$\lim_{|t|\to\infty}\|\varphi(t,x,(B,g'))\|_2 = 0.$$

则方程(4.3.1) 存在至少一个依分布一致相容解, 其值域在集合$Q_{(x_0,(A,f,g,h))} := \overline{\varphi(\mathbb{R}, x_0, (A,f,g,h))}$ 中.

证明 设(μ_φ, σ) 是$\mathcal{L}_Y$ 上的非自治动力系统. 由方程(4.3.1) 可知$(\mathcal{L}_Y, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是$\mathcal{L}_Y$ 上的动力系统. 根据引理4.2.3, $Q_{(x_0,(A,f,g,h))}$ 的分布$\overline{\mathcal{L}_{Q_{(x_0,(A,f,g,h))}}}$ 是紧致的. 则由假设条件, 我们不难得到不变集$H(y_0)$ 的半分布$\overline{\mathcal{L}_{H(y_0)}}$ 是紧致的(其中$y_0 := (x_0,(A,f,g,h)) \in Y$, $H(y_0) := \overline{\{\pi(t,y_0)|t\in\mathbb{R}\}}$). 令$y_1, y_2 \in H(y_0)\cap Y_{(B,f',g',h')}$, 其中$Y_{(B,f',g',h')} := \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n) \times \{(B,f',g',h')\}$ (即$y_i = (x_i,(B,f',g',h'))$ 并且$x_i \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P},\mathbb{R}^n)(i=1,2)$), 则

$$\lim_{|t|\to\infty} \rho(\pi(t,y_1),\pi(t,y_2)) = \lim_{|t|\to\infty} \|\varphi(t,x_1,(B,f',g',h')) - \varphi(t,x_2,(B,f',g',h'))\|_2 = 0.$$

应用定理4.2.3 和推论4.2.5, 证明完毕. □

定理 4.3.2 设(A,f,g,h) 是概周期的*(或者为τ-周期, 回复)*. 若引理*4.3.2* 的条件成立, 则方程(4.3.1) 存在至少一个依分布概周期解*(或者为τ-周期, 回复)*.

证明 定理可通过引理4.3.2 和推论4.2.5 得到. □

§4.4 应用

在本节中, 我们给出两个例子来应用我们得到的结论.

例 4.4.1 考虑下列*Gauss* 噪音驱动的随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = a(t)X(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}t + g(t)X(t)\mathrm{d}W(t) + h(t)\mathrm{d}W(t), \tag{4.4.1}$$

这里$a, g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是概周期函数定义如下

$$a(t) := -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^{3/2}} \sin\frac{t}{4k+2}, \quad g(t) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{5/2}} \sin\frac{t}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4.2}$$

类似于 *[33]*, 令

$$h_1(t) := \int_0^t a(s)\mathrm{d}s = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^{1/2}} \sin^2\frac{t}{2(4k+2)}.$$

则我们有当$|t| \to +\infty$ 时,

$$h_1(t) \le -\sum_{k \ge \frac{1}{4}(\frac{|t|}{2}-1)} \frac{t^2}{4}\frac{1}{(4k+2)^{5/2}} \le -\frac{t^2}{4}\int_{|s| \ge \frac{1}{4}(\frac{|t|}{2}-2)} \frac{\mathrm{d}s}{(4s+2)^{5/2}} \le -\frac{\sqrt{2}}{3}|t|^{1/2} \to -\infty.$$

令$h_2(t) := \int_0^t g^2(s)\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{3/2}} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)}$, 则有当$|t| \to +\infty$ 时, $h_2(t) \to 0$.

类似于 [68] 中的证明, 根据Itô 公式对任意的$t \ge 0$, 方程(4.4.1) 的齐次方程的解为

$$X(t) = X(0) \cdot e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}W(s) + \int_0^t a(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s}.$$

注意到对任意的$u \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}e^{u\int_0^t g(s)\mathrm{d}W(s)} = \mathbf{E}e^{\frac{1}{2}u^2\int_0^t g^2(s)\mathrm{d}s}$ (读者可参见 [69] 的第四章). 再根据Cauchy-Schwarz 不等式, 我们可以得到

$$\mathbf{E}\|X(t)\|^2 = \mathbf{E}\|X(0) \cdot e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}W(s) + \int_0^t a(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s}\|^2 \le \mathbf{E}\|X(0)\|^2 \cdot e^{\int_0^t g^2(s)\mathrm{d}s + 2\int_0^t a(s)\mathrm{d}s},$$

也即

$$\mathbf{E}\|X(t)\|^2 \le \mathbf{E}\|X(0)\|^2 \cdot e^{h_2(t)+2h_1(t)}.$$

由于$X(t)$ 是$\mathcal{L}^2$-有界的, 则当$t \to +\infty$ 时, $\mathbf{E}\|X(t)\|^2 \to 0$.

对任意的$r < 0$, 方程(4.4.1) 的齐次方程的解为

$$X(0) = X(r) \cdot e^{\int_r^0 g(s)\mathrm{d}W(s) + \int_r^0 a(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s},$$

也即

$$X(r) = X(0) \cdot e^{-\int_r^0 g(s)\mathrm{d}W(s) - \int_r^0 a(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s}.$$

由Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\mathbf{E}\|X(r))\|^2 = \mathbf{E}\|X(0) \cdot e^{-\int_r^0 g(s)\mathrm{d}W(s) - \int_r^0 a(s) - \frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s}\|^2 \le \mathbf{E}\|X(0)\|^2 \cdot e^{3\int_r^0 g^2(s)\mathrm{d}s - 2\int_r^0 a(s)\mathrm{d}s},$$

也即

$$\mathbf{E}\|X(r)\|^2 \le \mathbf{E}\|X(0)\|^2 \cdot e^{-3h_2(r)+2h_1(r)}.$$

类似的, 我们还有当$t \to -\infty$ 时, $\mathbf{E}\|X(r)\|^2 \to 0$.

综上所述, 若$f, h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是概周期函数且方程(4.4.1) 存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解, 根据引理4.3.1 和定理4.3.1, 方程存在至少一个依分布概自守解.

例 4.4.2 考虑下列*Gauss* 噪音驱动的随机微分方程的二维系统

$$\mathrm{d}X(t)=A(t)X(t)\mathrm{d}t+G(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \tag{4.4.3}$$

其中对任意的$t\in\mathbb{R}$,

$$A:=\begin{pmatrix} a(t) & -b(t)\\ b(t) & a(t)\end{pmatrix},\quad G:=\begin{pmatrix} g(t) & c(t)\\ -c(t) & g(t)\end{pmatrix};$$

$a(t)$ 和$g(t)$ 定义同等式(4.4.2), $b(t):=(3+\sin t+\sin\sqrt{2}t)^{-1}$, $c(t):=(\frac{1}{2+\cos t})^{1/2}$. 则我们有$h_3(t):=\int_0^t c^2(s)\mathrm{d}s=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{t}{2})$.

令$\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ 为方程(4.4.3) 的解. 应用*Itô* 乘法法则, 对任意的$t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(x_1^2(t)+x_2^2(t))=\mathrm{d}(x_1(t)+x_2(t))\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\\
=&(x_1(t),x_2(t))\left[A^T(t)+A(t)\right]\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t+(x_1(t),x_2(t))\left[G^T(t)+G(t)\right]\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}W(t)\\
&+(x_1(t),x_2(t))G^T(t)G(t)\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
=&(2a(t)+2g^2(t)+2c^2(t))(x_1^2(t)+x_2^2(t))\mathrm{d}t+2g(t)(x_1^2(t)+x_2^2(t))\mathrm{d}W(t).
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

对于任意的$y\in\mathbb{R}^2$, 由(4.4.4), 当$t\geq 0$ 时, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|X(t)\|^2&\leq\mathbf{E}\|X(0)\|^2\mathbf{E}\|e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}W(s)+\int_0^t a(s)+g^2(s)+c^2(t)-\frac{1}{2}g^2(s)\mathrm{d}s}\|^2\\
&\leq\mathbf{E}\|X(0)\|^2\cdot e^{2h_1(t)+3h_2(t)+2h_3(t)};
\end{aligned}$$

当$t\leq 0$ 时,

$$\mathbf{E}\|X(t)\|^2\leq\mathbf{E}\|X(0)\|^2\cdot e^{2h_1(t)-h_2(t)+2h_3(t)},$$

这里$X(t)$ 是方程(4.4.3) 的解, $h_1(t):=\int_0^t a(s)\mathrm{d}s$, $h_2(t):=\int_0^t g^2(s)\mathrm{d}s$. 类似于例*4.4.1*, 我们可以得到$\lim_{|t|\to\infty}\mathbf{E}\|Y(t)\|^2=0$.

综上所述, 若$F,H\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ 是概周期函数且方程

$$\mathrm{d}X(t)=A(t)X(t)\mathrm{d}t+F(t)\mathrm{d}t+G(t)X(t)\mathrm{d}W(t)+H(t)\mathrm{d}W(t)$$

存在一个$\mathcal{L}^2$-有界解, 根据引理*4.3.2* 和定理*4.3.2*, 则方程存在至少一个依分布概周期解.

第五章 结论

本学位论文主要致力于随机微分方程概自守解的研究. 首先, 我们引入了概自守随机过程和Poisson 概自守的概念. 其次, 我们研究了无限维Lévy 噪音驱动的半线性随机微分方程, 证明了其依分布概自守解的存在性和唯一性. 此外, 我们还研究了这些依分布概自守解的全局渐近稳定性. 再次, 我们研究了Lévy 噪音驱动的具有指数二分性的半线性随机微分方程, 证明了其存在唯一有界的依分布概自守解. 最后, 我们研究了Gauss 噪音驱动的缺少Favard 分离条件的线性随机微分方程, 证明了其依分布概周期解和依分布概自守解的存在性. 随着今后对于随机偏微分方程理论的学习, 我们还可以对Lévy 噪音驱动的随机偏微分方程进行进一步研究.

参考文献

[1] SATO K. Lévy processes and infinitely divisible distributions[M]. Cambridge university press, 1999.

[2] APPLEBAUM D. Lévy processes and stochastic calculus[M]. Cambridge university press, 2009.

[3] PESZAT S, ZABCZYK J. Stochastic partial differential equations with Lévy noise: An evolution equation approach[M]. Cambridge University Press, 2007.

[4] AMERIO L, PROUSE G. Almost-periodic functions and functional equations[M]. Van Nostrand Reinhold, 1971.

[5] BOCHNER S. Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles[J]. Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat., 1955, 15: 225-253.

[6] BOHR H A. Almost periodic functions[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1947.

[7] FAVARD J. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients presque-periodiques[J]. Acta mathematica, 1928, 51(1): 31-81.

[8] FAVARD J. Lecons sur les fonctions presque-Periodiques[M]. Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[9] FINK A M. Almost periodic differential equations[M]. Lecture Notes in Math., vol. 377, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1974.

[10] JOHNSON R A. A linear, almost periodic equation with an almost automorphic solution[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1981, 82(2): 199-205.

[11] JOHNSON R A. A review of recent work on almost periodic differential and difference operators[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1983, 1(3): 241-261.

[12] LEVITAN B M, ZHIKOV V V. Almost periodic functions and differential equations[M]. Cambridge Univ. Press, 1982.

[13] MILLER R K. Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of ap solutions[J]. Journal of Differential Equations, 1965, 1(3): 337-345.

[14] ORTEGA R, TARALLO M. Almost periodic linear differential equations with non-separated solutions[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 237(2): 402-426.

[15] Pankov A A. Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations[M]. Naukova Dumka, Kiev, 1985.

[16] SELL G R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics I. The basic theory[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1967a: 241-262.

[17] SELL G R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II. Limiting equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1967b: 263-283.

[18] YOSHIZAWA T. Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions[M]. Springer－Verlag, 1975.

[19] BOCHNER S. Uniform convergence of monotone sequences of functions[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1961, 47(4): 582-585.

[20] BOCHNER S. A new approach to almost periodicity[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1962, 48(12): 2039-2043.

[21] FLOR P. Rhythmische abbildungen abelscher gruppen II[J]. Zeit. Wahrsch. , 1967, 7(1): 17-28.

[22] FURSTENBERG H, WEISS B. On almost 1-1 extensions[J]. Israel Journal of Mathematics, 1989, 65(3): 311-322.

[23] MARKLEY N G, PAUL M E. Almost automorphic symbolic minimal sets without unique ergodicity[J]. Israel Journal of Mathematics, 1979, 34(3): 259-272.

[24] N'GUÉRÉKATA G M. Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces[M]. Springer Science and Business Media, 2001.

[25] REICH A. Prakompakte gruppen und fastperiodizitat[J]. Math. Z, 1970, 116.

[26] TERRAS R. Almost automorphic functions on topological groups, Indiana U[J]. Math. J, 1972, 21.

[27] TERRAS R. On almost periodic and almost automorphic differences of functions[J]. Duke Mathematical Journal, 1973, 40(1): 81-91.

[28] SHEN W, YI Y. On minimal sets of scalar parabolic equations with skew-product structures[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(11): 4413-4431.

[29] SHEN W, YI Y. Almost automorphic and almost periodic dynamics in skew-product semiflows[M]. American Mathematical Soc., 1998.

[30] VEECH W A. Almost automorphic functions[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1963, 49(4): 462-464.

[31] VEECH W A. Almost automorphic functions on groups[J]. American Journal of Mathematics, 1965: 719-751.

[32] VEECH W A. Topological dynamics[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1977, 83(5): 775-830.

[33] CARABALLO T, CHEBAN D. Almost periodic and almost automorphic solutions of linear differential/difference equations without Favard's separation condition. I[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(1): 108-128.

[34] ITÔ K. Differential equations determining Markov processes[J]. Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, 1942, 244(1077): 1352-1400.

[35] ITÔ K. Stochastic Integral[J]. Proceedings of the Imperial Academy, 1944, 20(8): 519-524.

[36] ITÔ K. On a stochastic integral equation[J]. Proceedings of the Japan Academy, 1946, 22(1-4): 32-35.

[37] ITÔ K. On stochastic differential equations[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, NO. 4, 1951.

[38] HALANAY A. Periodic and almost periodic solutions to affine stochastic systems[C]//Proceedings of the Eleventh International Conference on Nonlinear Oscillations (Budapest, 1987). János Bolyai Math. Soc. Budapest, 1987: 94-101.

[39] ARNOLD L, TUDOR C. Stationary and almost periodic solutions of almost periodic affine stochastic differential equations[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 1998, 64(3-4): 177-193.

[40] TUDOR C. Almost periodic solutions of affine stochastic evolution equations[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 1992, 38(4): 251-266.

[41] DA PRATO G, TUDOR C. Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1995, 13(1): 13-33.

[42] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Existence of almost periodic solutions to some stochastic differential equations[J]. Applicable Analysis, 2007a, 86(7): 819-827.

[43] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Square-mean almost periodic solutions nonautonomous stochastic differential equations[J]. Electron. J. Diff. Eqns, 2007b, 2007(117): 1-10.

[44] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Almost periodic stochastic processes[M]. Springer Science and Business Media, 2011.

[45] FU M, LIU Z. Square-mean almost automorphic solutions for some stochastic differential equations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2010, 138(10): 3689-3701.

[46] CHANG Y K, ZHAO Z H, N'GUÉRÉKATA G M. A new composition theorem for square-mean almost automorphic functions and applications to stochastic differential equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2011, 74(6): 2210-2219.

[47] CAO J, YANG Q, HUANG Z. Existence and exponential stability of almost automorphic mild solutions for stochastic functional differential equations[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2011, 83(03): 259-275.

[48] CUI J, YAN L. On almost automorphic mild solutions for nonautonomous stochastic evolution equations[C]//Abstract and Applied Analysis. Hindawi Publishing Corporation, 2012, 2012.

[49] DU J, SUN K, WANG Y. Pseudo almost automorphic solutions for non-autonomous stochastic differential equations with exponential dichotomy[J]. Communications in mathematical research, 2014, 30(2): 139-156.

[50] KAMENSKI M, MELLAH O, DE FITTE P R. Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients[J]. arXiv preprint arXiv:1210.7412, 2012.

[51] MELLAH O, RAYNAUD DE FITTE P. Counterexamples to mean square almost periodicity of the solutions of some SDEs with almost periodic coefficients[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 2013(91): 1-7.

[52] WANG Y, LIU Z. Almost periodic solutions for stochastic differential equations with Lévy noise[J]. Nonlinearity, 2012, 25(10): 2803-2821.

[53] DA PRATO G, ZABCZYK J. Stochastic equations in infinite dimensions[M]. Cambridge university press, 1992.

[54] KELLEY J L. General topology[M]. Springer Science and Business Media, 1975.

[55] BOGACHEV V I. Measure theory[M]. V. 1, 2. Springer Science and Business Media, 2007.

[56] DUDLEY R M. Real analysis and probability[M]. 2nd ed. Cambridge University Press, 2003.

[57] BRONSTEYN I U. Extensions of minimal transformation groups[M]. Springer, 1979.

[58] ELLIS R. Lectures on topological dynamics[M]. Benjamin, New York, 1969.

[59] MOROZAN T, TUDOR C. Almost periodic solutions of affine Itô equations[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1989, 7(4): 451-474.

[60] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer, 1983.

[61] HALE J K. Asymptotic behavior of dissipative systems[M]. American Mathematical Soc., 2010.

[62] ACQUISTAPACE P, TERRENI B. A unified approach to abstract linear nonautonomous parabolic equations[J]. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, 1987, 78: 47-107.

[63] DENG S, ZHANG W. Remarks on projected gronwall inequality[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition. 2002, 20(2): 307-313.

[64] MANIAR L, SCHNAUBELT R. Almost periodicity of inhomogeneous parabolic evolution equations[J]. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 2003: 299-318.

[65] CHEBAN D N. Global attractors of non-autonomous dissipative dynamical systems[J]. AMC, 2004.

[66] SHCHERBAKOV B A. Poisson stability of motions of dynamical systems and of solutions of differential equations[J]. Kishinev: Shtiintsa, 1985.

[67] CHEBAN D N. Global pullback attractors of-analytic nonautonomous dynamical systems[J]. Stochastics and Dynamics, 2001, 1(04): 511-535.

[68] EVANS L C. An introduction to stochastic differential equations[M]. Vol. 82. American Mathematical Soc., 2012.

[69] SHREVE S E. Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models[M]. Springer Science and Business Media, 2004.

作者简介及在学期间所取得的科研成果

一、作者简介

孙凯, 男, 汉族, 1984年12月出生于吉林省长春市. 2008年在吉林大学数学学院信息与计算科学专业获理学学士学位, 2010年在吉林大学数学研究所概率论与数理统计专业硕博连读.

二、在学期间所取得的科研成果

[1] Z. Liu and **K. Sun**, Almost automorphic solutions for stochastic differential equations driven by Lévy noise, *J. Funct. Anal.* **226** (2014), 1115–1149.

[2] J. Du, **K. Sun** and Y. Wang, Pseudo almost automorphic solutions for non-autonomous stochastic differential equations with exponential dichotomy, *Communications in mathematical research* **30** (2014), 139–156.

[3] **K. Sun**, Almost automorphic solutions for stochastic differential equations driven by Lévy noise with exponential dichotomy, *submitted*.

[4] Z. Liu and **K. Sun**, Almost periodic and almost automorphic solutions of linear stochastic differential equations without Favard's separation condition, *preprint*.

致谢

本文是在我的导师柳振鑫教授的悉心指导下完成的. 我在柳老师门下已有五年时间, 感谢柳老师对我五年来的培养, 教育, 指导和帮助. 柳老师治学严谨, 学识渊博, 为人谦虚和蔼, 坚韧不拔, 热爱生活, 不仅在学业上给予我悉心的指导和不懈的支持, 在生活上也给予我无微不至的关怀和帮助. 柳老师的言传身教, 让我受益匪浅, 使我懂得了如何做学问, 如何做人. 我时常以老师为榜样鞭策自己, 反省自身的不足之处. 值此论文付梓之际, 向我的恩师柳振鑫教授致以最崇高的敬意和最诚挚的感谢.

感谢辛勤教导过我的杨晓云教授, 王德辉教授, 韩月才教授, 郑文瑞教授, 韩燕教授, 朱复康教授, 董志山副教授, 张勇副教授, 赖民讲师, 各位老师学识渊博, 宽以待人, 感谢各位老师传授给我的理论专业知识, 为我在校期间的科研奠定了坚实的基础. 祝愿各位老师工作顺心, 身体健康, 阖家幸福.

感谢赵志文师兄, 张海祥师兄, 张颂师姐, 程建华师兄, 王言师姐, 贾博婷师姐, 王文鹤师弟, 杜金石师弟, 与我同届的李聪, 马东兴, 张李威, 田媛, 刘群, 张忠毅等. 感谢大家陪我一起度过了这五年的在校生活, 在这五年里, 有笑声也有汗水, 感谢大家对我的鼓励, 关心和帮助. 祝愿各位同学科研顺利, 学业有成, 家庭美满.

最后，还要感谢我的家人. 感谢父母对我的养育之恩, 对我一直的支持和鼓励, 他们是我多年来不断前行的源动力. 在此祝愿父母身体健康.

谨以此文献给所有关心我的人!